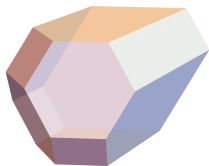


Groupe de travail *Espèces & sémantique*
Réécriture de termes sur les nestoèdres

Guillaume Laplante-Anfossi
Travail en collaboration avec Pierre-Louis Curien

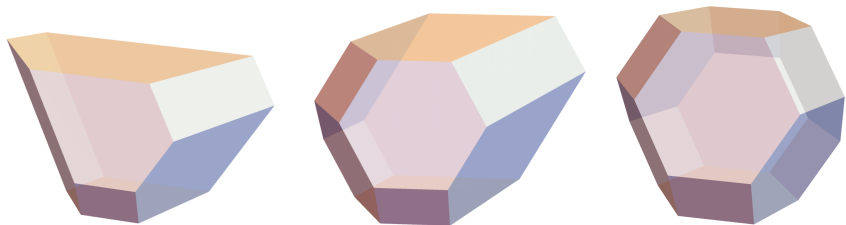
Centre for Quantum Mathematics
Syddansk Universitet
Odense, Danemark

Lundi 13 avril 2026



Nestoèdres

Les nestoèdres sont une famille de polytopes dont le treillis des faces encode la combinatoire des éclatements de certaines variétés algébriques (les “compactifications merveilleuses” de compléments d’arrangements d’hyperplans complexes).



Un *construit* est un arbre dont les sommets sont décorés par des sous-ensembles de sommets d'un hypergraphe, défini comme suit :

Un *construit* est un arbre dont les sommets sont décorés par des sous-ensembles de sommets d'un hypergraphe, défini comme suit :

Définition (Construits)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, et $X \subset H$ un sous-ensemble de sommets.

Un *construit* est un arbre dont les sommets sont décorés par des sous-ensembles de sommets d'un hypergraphe, défini comme suit :

Définition (Construits)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, et $X \subset H$ un sous-ensemble de sommets.

- 1 Si $X = H$, alors l'arbre à un sommet décoré par X est un construit.

Un *construit* est un arbre dont les sommets sont décorés par des sous-ensembles de sommets d'un hypergraphe, défini comme suit :

Définition (Construits)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, et $X \subset H$ un sous-ensemble de sommets.

- 1 Si $X = H$, alors l'arbre à un sommet décoré par X est un construit.
- 2 Si T_1, \dots, T_n sont des construits des composantes connexes $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n$ de $\mathbb{H} \setminus X$, alors l'arbre $X(T_1, \dots, T_n)$ dont la racine est décorée par X et avec n arêtes sortantes sur lesquelles les T_i sont greffés est un construit.

Un *construit* est un arbre dont les sommets sont décorés par des sous-ensembles de sommets d'un hypergraphe, défini comme suit :

Définition (Construits)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, et $X \subset H$ un sous-ensemble de sommets.

- 1 Si $X = H$, alors l'arbre à un sommet décoré par X est un construit.
- 2 Si T_1, \dots, T_n sont des construits des composantes connexes $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n$ de $\mathbb{H} \setminus X$, alors l'arbre $X(T_1, \dots, T_n)$ dont la racine est décorée par X et avec n arêtes sortantes sur lesquelles les T_i sont greffés est un construit.

Une *construction* est un construit dont les sommets sont décorés par des singletons.

Les construits d'un hypergraphe donné forment naturellement un poset.

Définition (Relations de couverture)

Un construit T *couvre* un construit S , noté $S \prec T$, si T peut être obtenu à partir de S par contraction d'une arête.

Les construits d'un hypergraphe donné forment naturellement un poset.

Définition (Relations de couverture)

Un construit T *couvre* un construit S , noté $S \prec T$, si T peut être obtenu à partir de S par contraction d'une arête.

Définition (Nestoèdre)

Un *nestoèdre* est un polytope dont le treillis des faces est isomorphe au poset des construits d'un hypergraphe connexe.

Nestoèdres

Les construits d'un hypergraphe donné forment naturellement un poset.

Définition (Relations de couverture)

Un construit T *couvre* un construit S , noté $S \prec T$, si T peut être obtenu à partir de S par contraction d'une arête.

Définition (Nestoèdre)

Un *nestoèdre* est un polytope dont le treillis des faces est isomorphe au poset des construits d'un hypergraphe connexe.

Exemple

- simplexes, cubes, associaèdres (graphes linéaires), permutaèdres (graphes complets), opéraèdres (graphes par blocs sans fourche, d'aux des arbres).

Définition (Signature)

Une *signature* Σ est un tuple $(V, F, S, \text{ar}, \text{out}, \text{in})$ formé de

- un ensemble V de *variables*,

Définition (Signature)

Une *signature* Σ est un tuple $(V, F, S, \text{ar}, \text{out}, \text{in})$ formé de

- un ensemble V de *variables*,
- un ensemble non-vide F of *symboles de fonction*, et

Définition (Signature)

Une *signature* Σ est un tuple $(V, F, S, \text{ar}, \text{out}, \text{in})$ formé de

- un ensemble V de *variables*,
- un ensemble non-vide F of *symboles de fonction*, et
- un ensemble S de *sortes*,

Définition (Signature)

Une *signature* Σ est un tuple $(V, F, S, \text{ar}, \text{out}, \text{in})$ formé de

- un ensemble V de *variables*,
- un ensemble non-vide F of *symboles de fonction*, et
- un ensemble S de *sortes*,

de même que des fonctions *arité*, *sorte de sortie* et *sorte d'entrée*

- $\text{ar} : F \rightarrow \mathbb{N}$,

Définition (Signature)

Une *signature* Σ est un tuple $(V, F, S, \text{ar}, \text{out}, \text{in})$ formé de

- un ensemble V de *variables*,
- un ensemble non-vide F of *symboles de fonction*, et
- un ensemble S de *sortes*,

de même que des fonctions *arité*, *sorte de sortie* et *sorte d'entrée*

- $\text{ar} : F \rightarrow \mathbb{N}$,
- $\text{out} : F \cup V \rightarrow S$,

Définition (Signature)

Une *signature* Σ est un tuple $(V, F, S, \text{ar}, \text{out}, \text{in})$ formé de

- un ensemble V de *variables*,
- un ensemble non-vide F of *symboles de fonction*, et
- un ensemble S de *sortes*,

de même que des fonctions *arité*, *sorte de sortie* et *sorte d'entrée*

- $\text{ar} : F \rightarrow \mathbb{N}$,
- $\text{out} : F \cup V \rightarrow S$,
- $\text{in} : F \rightarrow \sum_{n \geq 0} S^n$, telle que pour $f \in F$, on a $\text{in}(f) \in S^{\text{ar}(f)}$.

Définition (Termes d'une signature)

L'ensemble $\text{Ter}(\Sigma)$ des *termes* sur une signature Σ est défini par :

Définition (Termes d'une signature)

L'ensemble $\text{Ter}(\Sigma)$ des *termes* sur une signature Σ est défini par :

- 1 Si $t \in V$ est une variable, alors t est un terme.

Définition (Termes d'une signature)

L'ensemble $\text{Ter}(\Sigma)$ des *termes* sur une signature Σ est défini par :

- 1 Si $t \in V$ est une variable, alors t est un terme.
- 2 Si $f \in F$ est un symbole de fonction d'arité $\text{ar}(f) = n$ et t_1, \dots, t_n sont des termes de sorte $\text{out}(t_i) = \text{in}(f, i)$, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme de sorte $\text{out}(f(t_1, \dots, t_n)) := \text{out}(f)$.

Définition (Termes d'une signature)

L'ensemble $\text{Ter}(\Sigma)$ des *termes* sur une signature Σ est défini par :

- 1 Si $t \in V$ est une variable, alors t est un terme.
- 2 Si $f \in F$ est un symbole de fonction d'arité $\text{ar}(f) = n$ et t_1, \dots, t_n sont des termes de sorte $\text{out}(t_i) = \text{in}(f, i)$, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme de sorte $\text{out}(f(t_1, \dots, t_n)) := \text{out}(f)$.

L'ensemble des *variables* d'un terme $t \in \text{Ter}(\Sigma)$ est défini par

$$\text{var}(t) := \begin{cases} \{t\} & \text{si } t \in V, \\ \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{var}(t_i) & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n). \end{cases}$$

Définition (Termes d'une signature)

L'ensemble $\text{Ter}(\Sigma)$ des *termes* sur une signature Σ est défini par :

- 1 Si $t \in V$ est une variable, alors t est un terme.
- 2 Si $f \in F$ est un symbole de fonction d'arité $\text{ar}(f) = n$ et t_1, \dots, t_n sont des termes de sorte $\text{out}(t_i) = \text{in}(f, i)$, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme de sorte $\text{out}(f(t_1, \dots, t_n)) := \text{out}(f)$.

L'ensemble des *variables* d'un terme $t \in \text{Ter}(\Sigma)$ est défini par

$$\text{var}(t) := \begin{cases} \{t\} & \text{si } t \in V, \\ \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{var}(t_i) & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n). \end{cases}$$

Un terme t est dit *fermé* s'il ne contient aucune variable ($\text{var}(t) = \emptyset$).

Définition (Règle de réécriture)

Une *règle de réécriture* sur Σ est une paire ordonnée (l, r) de termes dans $\text{Ter}(\Sigma)$, notée $l \rightarrow r$, qui vérifie

- 1 $\text{out}(l) = \text{out}(r)$,
- 2 $l \notin V$, et
- 3 $\text{var}(r) \subseteq \text{var}(l)$.

Définition (Règle de réécriture)

Une *règle de réécriture* sur Σ est une paire ordonnée (l, r) de termes dans $\text{Ter}(\Sigma)$, notée $l \rightarrow r$, qui vérifie

- 1 $\text{out}(l) = \text{out}(r)$,
- 2 $l \notin V$, et
- 3 $\text{var}(r) \subseteq \text{var}(l)$.

Définition (Système de réécriture)

Un *système de réécriture de termes* multi-sortes consiste en la donnée (Σ, R) d'une signature Σ et d'un ensemble R de règles de réécriture sur Σ .

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des faces)

La *signature* $\Sigma_{\mathbb{H}}$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des faces)

La *signature* $\Sigma_{\mathbb{H}}$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(X, Y) \mid \emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des faces)

La *signature* $\Sigma_{\mathbb{H}}$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(X, Y) \mid \emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des faces)

La *signature* $\Sigma_{\mathbb{H}}$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(X, Y) \mid \emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- Pour $(X, Y) \in F$, l'arité $\text{ar}(X, Y)$ est donnée par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus X$.

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des faces)

La *signature* $\Sigma_{\mathbb{H}}$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(X, Y) \mid \emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- Pour $(X, Y) \in F$, l'arité $\text{ar}(X, Y)$ est donnée par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus X$.
- Pour $X \in V$ on définit $\text{out}(X) = X$; pour $(X, Y) \in F$ on définit $\text{out}(X, Y) = Y$.

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des faces)

La *signature* $\Sigma_{\mathbb{H}}$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(X, Y) \mid \emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- Pour $(X, Y) \in F$, l'arité $\text{ar}(X, Y)$ est donnée par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus X$.
- Pour $X \in V$ on définit $\text{out}(X) = X$; pour $(X, Y) \in F$ on définit $\text{out}(X, Y) = Y$.
- Pour $(X, Y) \in F$, en notant Y_1, \dots, Y_n les composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus X$, on définit $\text{in}((X, Y), i) = Y_i$.

Les termes associés à cette signature ne sont rien d'autre que les construits.

Lemme (Correspondance entre termes et faces)

La projection des symboles de fonctions (X, Y) sur leur première composante X définit une bijection entre l'ensemble des termes fermés de sorte H sur $\Sigma_{\mathbb{H}}$ et l'ensemble des construits de \mathbb{H} .

Réécriture sur les nestoèdres

Les termes associés à cette signature ne sont rien d'autre que les construits.

Lemme (Correspondance entre termes et faces)

La projection des symboles de fonctions (X, Y) sur leur première composante X définit une bijection entre l'ensemble des termes fermés de sorte H sur $\Sigma_{\mathbb{H}}$ et l'ensemble des construits de \mathbb{H} .

Démonstration.

Comparer les définitions récursives. □

Définition (Règles de réécriture sur les faces)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, K un sous-ensemble connexe de H , et $X \subseteq K$. Soient U_1, \dots, U_n les composantes connexes de $\mathbb{K} \setminus X$. Soit $Y \subseteq U_i$, et soient V_1, \dots, V_k les composantes connexes de $\mathbb{K}_i \setminus Y$.

Définition (Règles de réécriture sur les faces)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, K un sous-ensemble connexe de H , et $X \subseteq K$. Soient U_1, \dots, U_n les composantes connexes de $\mathbb{K} \setminus X$. Soit $Y \subseteq U_i$, et soient V_1, \dots, V_k les composantes connexes de $\mathbb{K}_i \setminus Y$. On définit alors la *règle de réécriture*

$$(X, K)(U_1, \dots, U_{i-1}, (Y, U_i)(V_1, \dots, V_k), U_{i+1}, \dots, U_n)$$

$$\longrightarrow (X \cup Y, K)(U_1, \dots, U_{i-1}, V_1, \dots, V_k, U_{i+1}, \dots, U_n)$$

si $\max(Y) < \min(X)$,

Définition (Règles de réécriture sur les faces)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, K un sous-ensemble connexe de H , et $X \subseteq K$. Soient U_1, \dots, U_n les composantes connexes de $\mathbb{K} \setminus X$. Soit $Y \subseteq U_i$, et soient V_1, \dots, V_k les composantes connexes de $\mathbb{K}_i \setminus Y$. On définit alors la *règle de réécriture*

$$(X, K)(U_1, \dots, U_{i-1}, (Y, U_i)(V_1, \dots, V_k), U_{i+1}, \dots, U_n)$$

$$\longrightarrow (X \cup Y, K)(U_1, \dots, U_{i-1}, V_1, \dots, V_k, U_{i+1}, \dots, U_n)$$

si $\max(Y) < \min(X)$, et

$$(X \cup Y, K)(U_1, \dots, U_{i-1}, V_1, \dots, V_k, U_{i+1}, \dots, U_n)$$

$$\longrightarrow (X, K)(U_1, \dots, U_{i-1}, (Y, U_i)(V_1, \dots, V_k), U_{i+1}, \dots, U_n)$$

si $\max(X) < \min(Y)$. On note $R_{\mathbb{H}}$ cet ensemble de règles.

Ceci peut être vu comme la définition d'un préordre sur les construits de \mathbb{H} , distinct de l'inclusion des faces. Il coïncide avec certains ordres connus dans certains cas particuliers :

- l'ordre faible ("facial weak order") sur les faces des permutaèdres,
- l'ordre de Tamari généralisé sur les faces des associaèdres.

Ceci peut être vu comme la définition d'un préordre sur les construits de \mathbb{H} , distinct de l'inclusion des faces. Il coïncide avec certains ordres connus dans certains cas particuliers :

- l'ordre faible ("facial weak order") sur les faces des permutaèdres,
- l'ordre de Tamari généralisé sur les faces des associaèdres.

Théorème (Curien–Delcroix-Oger–Obradović, en préparation)

Le préordre défini par les règles de réécriture $R_{\mathbb{H}}$ sur les faces du nestoèdre associé à un hypergraphe connexe \mathbb{H} est un ordre.

Réécriture sur les nestoèdres

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des constructions)

La *signature des constructions* $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des constructions)

La *signature des constructions* $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(x, Y) \mid x \in Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des constructions)

La *signature des constructions* $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(x, Y) \mid x \in Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des constructions)

La *signature des constructions* $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(x, Y) \mid x \in Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- Pour $(x, Y) \in F$, l'arité $\text{ar}(x, Y)$ est donnée par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus \{x\}.$

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des constructions)

La *signature des constructions* $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(x, Y) \mid x \in Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- Pour $(x, Y) \in F$, l'arité $\text{ar}(x, Y)$ est donnée par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus \{x\}$.
- Pour $X \in V$, on définit $\text{out}(X) := X$; pour $(x, Y) \in F$ on définit $\text{out}(x, Y) := Y$.

On note \mathbb{H}_X la restriction d'un hypergraphe \mathbb{H} à un sous-ensemble X de sommets.

Définition (Signature des constructions)

La *signature des constructions* $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ d'un hypergraphe connexe \mathbb{H} est définie par :

- $V := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- $F := \{(x, Y) \mid x \in Y \subseteq H, \mathbb{H}_Y \text{ est connexe}\}.$
- $S := \{X \subseteq H \mid \mathbb{H}_X \text{ est connexe}\}.$
- Pour $(x, Y) \in F$, l'arité $\text{ar}(x, Y)$ est donnée par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus \{x\}$.
- Pour $X \in V$, on définit $\text{out}(X) := X$; pour $(x, Y) \in F$ on définit $\text{out}(x, Y) := Y$.
- Pour $(x, Y) \in F$, en notant Y_1, \dots, Y_n les composantes connexes de $\mathbb{H}_Y \setminus \{x\}$, on définit $\text{in}((x, Y), i) := Y_i$.

Lemme (Correspondance entre les termes et les constructions)

La projection des symboles de fonction (x, Y) sur leur première composante x définit une bijection entre l'ensemble des termes fermés de sorte H sur $\Sigma_{\mathbb{H}}^c$ et l'ensemble des constructions de \mathbb{H} .

Définition (Règles de réécriture sur les constructions)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, K un sous-ensemble connexe de H , et $x, y \in K$. Écrivons

- U_1, \dots, U_ℓ les comp. connexes de $\mathbb{K} \setminus x$ ne contenant pas y ,
- W_1, \dots, W_n les comp. connexes de $\mathbb{K} \setminus y$ ne contenant pas x , et
- V_1, \dots, V_m les composantes connexes restantes.

Notons K_y (resp. K_x) la composante connexe de $\mathbb{K} \setminus x$ (resp. $\mathbb{K} \setminus y$) qui contient y (resp. x).

Définition (Règles de réécriture sur les constructions)

Soit \mathbb{H} un hypergraphe connexe, K un sous-ensemble connexe de H , et $x, y \in K$. Écrivons

- U_1, \dots, U_ℓ les comp. connexes de $\mathbb{K} \setminus x$ ne contenant pas y ,
- W_1, \dots, W_n les comp. connexes de $\mathbb{K} \setminus y$ ne contenant pas x , et
- V_1, \dots, V_m les composantes connexes restantes.

Notons K_y (resp. K_x) la composante connexe de $\mathbb{K} \setminus x$ (resp. $\mathbb{K} \setminus y$) qui contient y (resp. x). On définit alors la *règle de réécriture*

$$(x, K)(U_1, \dots, U_\ell, (y, K_y)(V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n)) \\ \longrightarrow (y, K)(W_1, \dots, W_n, (x, K_x)(V_1, \dots, V_m, U_1, \dots, U_\ell))$$

lorsque $x < y$. On note $R_{\mathbb{H}}^c$ cet ensemble de règles.

Réécriture sur les nestoèdres

Ceci peut être vu comme la définition d'un préordre sur les constructions de \mathbb{H} . Il coïncide avec

- le “flip order” de Barnard–McConville sur les sommets des associaèdres de graphe.

Réécriture sur les nestoèdres

Ceci peut être vu comme la définition d'un préordre sur les constructions de \mathbb{H} . Il coïncide avec

- le “flip order” de Barnard–McConville sur les sommets des associaèdres de graphe.

Théorème

Le préordre défini par les règles de réécriture $R_{\mathbb{H}}^C$ sur les sommets du nestoèdre associé à un hypergraphe connexe \mathbb{H} est un ordre.

Réécriture sur les nestoèdres

Ceci peut être vu comme la définition d'un préordre sur les constructions de \mathbb{H} . Il coïncide avec

- le “flip order” de Barnard–McConville sur les sommets des associaèdres de graphe.

Théorème

Le préordre défini par les règles de réécriture $R_{\mathbb{H}}^C$ sur les sommets du nestoèdre associé à un hypergraphe connexe \mathbb{H} est un ordre.

Démonstration.

On considère les réalisations de Postnikov des nestoèdres, pour lesquelles tout vecteur d'orientation à coordonnées strictement décroissantes induit le préordre donné. □

Réécriture sur les nestoèdres

Ceci peut être vu comme la définition d'un préordre sur les constructions de \mathbb{H} . Il coïncide avec

- le “flip order” de Barnard–McConville sur les sommets des associaèdres de graphe.

Théorème

Le préordre défini par les règles de réécriture $R_{\mathbb{H}}^C$ sur les sommets du nestoèdre associé à un hypergraphe connexe \mathbb{H} est un ordre.

Démonstration.

On considère les réalisations de Postnikov des nestoèdres, pour lesquelles tout vecteur d'orientation à coordonnées strictement décroissantes induit le préordre donné. □

Corollaire

Le système de réécriture $(\Sigma_{\mathbb{H}}^C, R_{\mathbb{H}}^C)$ a la propriété de terminaison.

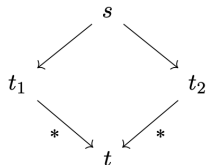
Définition (Confluence)

Un système de réécriture (Σ, R) possède la propriété de *confluence locale* (resp. *confluence*) si pour tout $s, t_1, t_2 \in \text{Ter}(\Sigma)$ tels que $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ (resp. $t_1 \overset{*}{\leftarrow} s \overset{*}{\rightarrow} t_2$), il existe un terme t pour lequel $t_1 \overset{*}{\rightarrow} t \overset{*}{\leftarrow} t_2$.

Définition (Confluence)

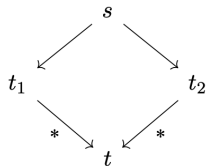
Un système de réécriture (Σ, R) possède la propriété de *confluence locale* (resp. *confluence*) si pour tout $s, t_1, t_2 \in \text{Ter}(\Sigma)$ tels que $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ (resp. $t_1 \overset{*}{\leftarrow} s \overset{*}{\rightarrow} t_2$), il existe un terme t pour lequel $t_1 \overset{*}{\rightarrow} t \overset{*}{\leftarrow} t_2$.

Le diagramme suivant est appelé *diagramme de confluence locale* :



Lemme (de Newman)

Pour un système (Σ, R) possédant la propriété de terminaison, les propriétés de confluence locale et de confluence sont équivalentes.



Définition

Une *paire critique* est un couple de termes $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ obtenu à partir d'un chevauchement minimal et non trivial entre deux règles de réécriture.

Définition

Une *paire critique* est un couple de termes $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ obtenu à partir d'un chevauchement minimal et non trivial entre deux règles de réécriture. On dit qu'elle *converge* si le diagramme $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ peut être complété en diagramme de confluence locale.

Définition

Une *paire critique* est un couple de termes $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ obtenu à partir d'un chevauchement minimal et non trivial entre deux règles de réécriture. On dit qu'elle *converge* si le diagramme $t_1 \leftarrow s \rightarrow t_2$ peut être complété en diagramme de confluence locale.

Lemme (de Knuth-Bendix)

Un système de réécriture de termes possède la propriété de confluence locale si et seulement si toute paire critique est convergente.

Théorème

Le système de réécriture $(\Sigma_{\mathbb{H}}^c, R_{\mathbb{H}}^c)$ possède la propriété de confluence locale. Les diagrammes de confluence locaux associés aux termes fermés de sorte H sont en bijection avec les 2-faces orientées de \mathbb{H} .

Théorème

Le système de réécriture $(\Sigma_{\mathbb{H}}^c, R_{\mathbb{H}}^c)$ possède la propriété de confluence locale. Les diagrammes de confluence locaux associés aux termes fermés de sorte H sont en bijection avec les 2-faces orientées de \mathbb{H} .

Corollaire

Le système de réécriture $(\Sigma_{\mathbb{H}}^c, R_{\mathbb{H}}^c)$ possède les propriétés de confluence et de terminaison.

Réécriture sur les nestoèdres

2-faces des nestoèdres (types , ,)

Réécriture sur les nestoèdres

2-faces des nestoèdres (types A, ,)

$$\begin{array}{ccc} x_1(x_2) \cdots y_1(y_2) & \xrightarrow{\{x_1, x_2\} \cdots y_1(y_2)} & x_2(x_1) \cdots y_1(y_2) \\ \left. \begin{array}{c} x_1(x_2) \cdots \{y_1, y_2\} \\ | \\ x_1(x_2) \cdots y_2(y_1) \end{array} \right\} & \{x_1, x_2\} \cdots \{y_1, y_2\} & \left. \begin{array}{c} | \\ x_2(x_1) \cdots \{y_1, y_2\} \\ x_2(x_1) \cdots y_2(y_1) \end{array} \right\} \\ & \xrightarrow{\{x_1, x_2\} \cdots y_2(y_1)} & \end{array}$$

Réécriture sur les nestoèdres

2-faces des nestoèdres (types A, B1,)

$$\begin{array}{ccc}
 x_1(x_2) \cdots y_1(y_2) & \xrightarrow{\{x_1, x_2\} \cdots y_1(y_2)} & x_2(x_1) \cdots y_1(y_2) \\
 \left| \begin{array}{c} x_1(x_2) \cdots \{y_1, y_2\} \end{array} \right. & \{x_1, x_2\} \cdots \{y_1, y_2\} & \left. \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} x_2(x_1) \cdots \{y_1, y_2\} \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 x_1(x_2) \cdots y_2(y_1) & \xrightarrow{\{x_1, x_2\} \cdots y_2(y_1)} & x_2(x_1) \cdots y_2(y_1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & x_1(x_2, x_3) & \\
 \{x_1, x_2\}(x_3) & / & \backslash \{x_1, x_3\}(x_2) \\
 & \{x_2, x_3\}(x_1) & \\
 x_2(x_3, x_1) & \xrightarrow{\quad} & x_3(x_1, x_2)
 \end{array}$$

Réécriture sur les nestoèdres

2-faces des nestoèdres (types A, B1, B2)

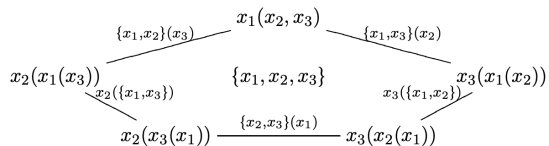
$$\begin{array}{ccc}
 x_1(x_2) \cdots y_1(y_2) & \xrightarrow{\{x_1, x_2\} \cdots y_1(y_2)} & x_2(x_1) \cdots y_1(y_2) \\
 \left| \begin{array}{c} x_1(x_2) \cdots \{y_1, y_2\} \end{array} \right. & \{x_1, x_2\} \cdots \{y_1, y_2\} & \left. \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} x_2(x_1) \cdots \{y_1, y_2\} \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 x_1(x_2) \cdots y_2(y_1) & \xrightarrow{\{x_1, x_2\} \cdots y_2(y_1)} & x_2(x_1) \cdots y_2(y_1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & x_1(x_2, x_3) & \\
 \{x_1, x_2\}(x_3) & / \quad \backslash & \{x_1, x_3\}(x_2) \\
 x_2(x_3, x_1) & \xrightarrow{\{x_2, x_3\}(x_1)} & x_3(x_1, x_2)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x_1(x_2, x_3) & & \\
 & \{x_1, x_2\}(x_3) & / \quad \backslash & \{x_1, x_3\}(x_2) & \\
 x_2(x_1(x_3)) & & \{x_1, x_2, x_3\} & & x_3(x_1, x_2) \\
 & \{x_2, x_3\}(x_1) & / \quad \backslash & \{x_2, x_3\}(x_1) & \\
 & x_2(\{x_1, x_3\}) & & & x_2(x_3(x_1))
 \end{array}$$

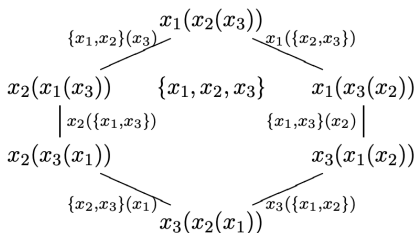
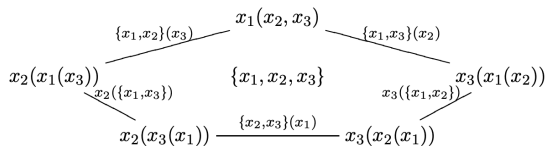
Réécriture sur les nestoèdres

2-faces des nestoèdres (types B3,)



Réécriture sur les nestoèdres

2-faces des nestoèdres (types B3, B4)



Soit C un ensemble de couleurs.

Définition

Une *opérade colorée* par C est une famille d'espaces vectoriels

$$\mathcal{O}(c_1, \dots, c_n; c)$$

munis d'applications linéaires

$$\begin{aligned} \circ_i : \mathcal{O}(c_1, \dots, c_m; c) \otimes \mathcal{O}(d_1, \dots, d_n; c_i) &\rightarrow \\ \mathcal{O}(c_1, \dots, c_{i-1}, d_1, \dots, d_n, c_{i+1}, \dots, c_m; c) & \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés d'associativité et d'unitarité.

Considérons comme couleurs l'ensemble des hypergraphes connexes \mathbb{H} .

Considérons comme couleurs l'ensemble des hypergraphes connexes \mathbb{H} .

Définition

L'*opérade hypergraphique* est donnée par les espaces vectoriels

$$\mathcal{P}(\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n; \mathbb{H}) := \mathbb{K}\{X \subseteq H, \mathbb{H} \setminus X \rightsquigarrow \mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n\}$$

munis des compositions partielles \circ_i données par la greffe des construits suivie de la contraction d'arête interne. Les unités sont obtenues en prenant $X = \emptyset$.

Considérons comme couleurs l'ensemble des hypergraphes connexes \mathbb{H} .

Définition

L'*opérade hypergraphique* est donnée par les espaces vectoriels

$$\mathcal{P}(\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n; \mathbb{H}) := \mathbb{K}\{X \subseteq H, \mathbb{H} \setminus X \rightsquigarrow \mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n\}$$

munis des compositions partielles \circ_i données par la greffe des construits suivie de la contraction d'arête interne. Les unités sont obtenues en prenant $X = \emptyset$.

Lemme

Une présentation de \mathcal{P} est donnée par les générateurs et relations

$$E := \mathbb{K}\{(x, \mathbb{H}), x \in H\}$$

$$R := \mathbb{K}\{(x, \mathbb{H}) \circ_i (y, \mathbb{H}_y) - (y, \mathbb{H}) \circ_j (x, \mathbb{H}_x)\}$$

Théorème

L'opérade hypergraphique \mathcal{P} est de Koszul.

Cela suit directement de nos résultats précédents, et de la méthode de réécriture.

Théorème

L'opérade hypergraphique \mathcal{P} est de Koszul.

Cela suit directement de nos résultats précédents, et de la méthode de réécriture.

Théorème

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique. Si son espace de générateurs E admet une base ordonnée pour laquelle il existe un ordre compatible sur les arbres planaires pour lequel toute paire critique est convergente, alors \mathcal{P} est de Koszul.

On peut considérer les \mathcal{P} -algèbres dans la catégorie des catégories.

Définition

Une *\mathcal{P} -algèbre catégorifiée* est la donnée d'une famille de catégories $\mathcal{C}(\mathbb{H})$ indexée par les hypergraphes connexes, de multifoncteurs

$$x : \mathcal{C}(\mathbb{H}_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(\mathbb{H}_n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{H})$$

pour chaque $x \in H$ tel que $\mathbb{H} \setminus x \rightsquigarrow \mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_n$, et de transformations naturelles

$$(x, \mathbb{H}) \circ_i (y, \mathbb{H}_y) \rightarrow (y, \mathbb{H}) \circ_j (x, \mathbb{H}_x)$$

pour $x < y$, telles que les diagrammes correspondants aux 2-faces orientées des nestoèdres commutent.

Théorème (Cohérence pour les \mathcal{P} -algèbres)

Dans une \mathcal{P} -algèbre catégorifiée, tous les diagrammes obtenus par associativité des compositions itérées des multifoncteurs commutent.

Théorème (Cohérence pour les \mathcal{P} -algèbres)

Dans une \mathcal{P} -algèbre catégorifiée, tous les diagrammes obtenus par associativité des compositions itérées des multifoncteurs commutent.

Démonstration.

Utiliser la correspondance de Huet pour reformuler la preuve de cohérence de MacLane en termes de réécriture, et conclure avec les résultats précédents ! □

Théorème (Cohérence pour les \mathcal{P} -algèbres)

Dans une \mathcal{P} -algèbre catégorifiée, tous les diagrammes obtenus par associativité des compositions itérées des multifoncteurs commutent.

Démonstration.

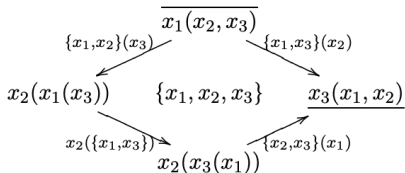
Utiliser la correspondance de Huet pour reformuler la preuve de cohérence de MacLane en termes de réécriture, et conclure avec les résultats précédents ! □

Exemple

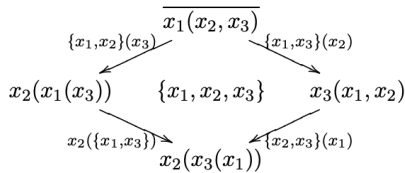
- Cohérence de MacLane : graphes linéaires
- Cohérence pour les opérades catégorifiées : graphes par blocs sans fourche (duaux des arbres)

Merci de votre attention !

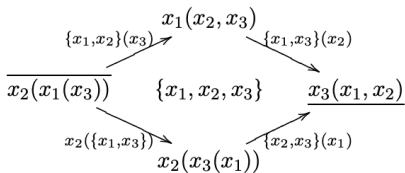
$$\boxed{x_1 > x_2 > x_3}$$



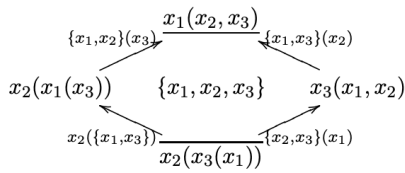
$$\boxed{x_1 > x_3 > x_2}$$



$$\boxed{x_2 > x_1 > x_3}$$



$$\boxed{x_2 > x_3 > x_1}$$



$$\boxed{x_3 > x_1 > x_2}$$

$$x_1(x_2, x_3)$$

$$\boxed{x_3 > x_2 > x_1}$$

$$x_1(x_2, x_3)$$