Prix de thèse Galilée 2023

Approximations cellulaires d'applications diagonales de polytopes opéradiques

Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI

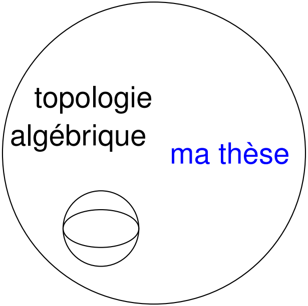
Sous la direction de Eric HOFFBECK et Bruno VALLETTE
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, Institut Galilée
Université Sorbonne Paris Nord

Vendredi 26 mai 2023

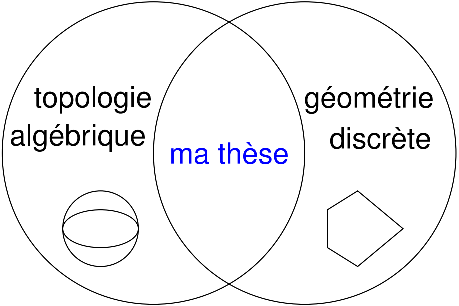
À l'intersection de deux domaines

ma thèse

À l’intersection de deux domaines



À l'intersection de deux domaines



Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Henri Poincaré (1854-1912)

Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Henri Poincaré (1854-1912)

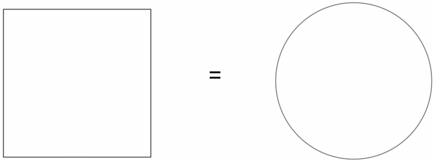
- But : comprendre la forme des objets à l'aide des nombres et leurs opérations

Qu’est-ce que la topologie algébrique ?

- Henri Poincaré (1854-1912)

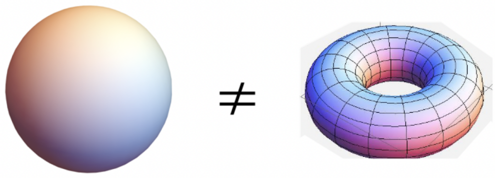
- But : comprendre la forme des objets à l’aide des nombres et leurs opérations

- Étude des formes avec une certaine flexibilité



Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

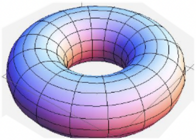
- Comment distinguer la surface d'un ballon de celle d'un beignet ?



Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Comment distinguer la surface d'un ballon de celle d'un beignet ?

$\neq$

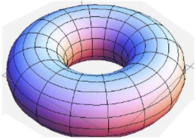


- Compter leurs trous !

Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Comment distinguer la surface d'un ballon de celle d'un beignet ?

$\neq$



- Compter leurs trous !
- Attention : ces nombres sont en général insuffisants, il faut considérer des *ensembles* de nombres **et** *leurs opérations* (multiplier, élever au carré, etc.)

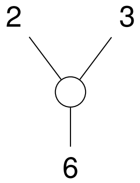
Qu’est-ce que la topologie algébrique ?

- Rêve de Poincaré : décrire *entièrement* la forme des objets à l’aide de nombres et leurs opérations

- Rêve de Poincaré : décrire *entièrement* la forme des objets à l'aide de nombres et leurs opérations

À retenir

On doit pour cela considérer des structures algébriques comportant une *infinité d'opérations*.

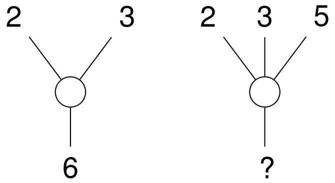


Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Rêve de Poincaré : décrire *entièrement* la forme des objets à l'aide de nombres et leurs opérations

À retenir

On doit pour cela considérer des structures algébriques comportant une *infinité d'opérations*.

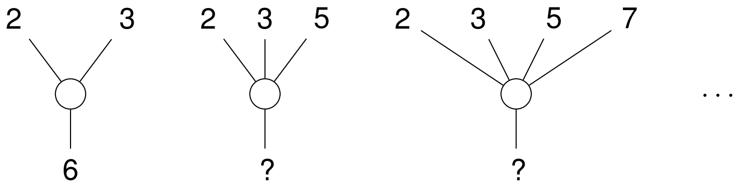


Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Rêve de Poincaré : décrire *entièrement* la forme des objets à l'aide de nombres et leurs opérations

À retenir

On doit pour cela considérer des structures algébriques comportant une *infinité d'opérations*.

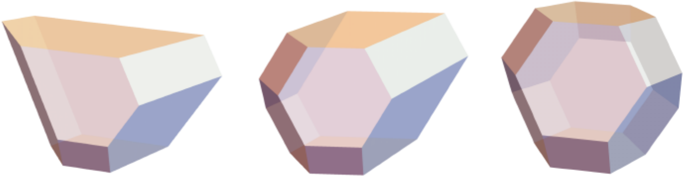


Qu’est-ce que la géométrie discrète ?

- Étude des *polytopes*...

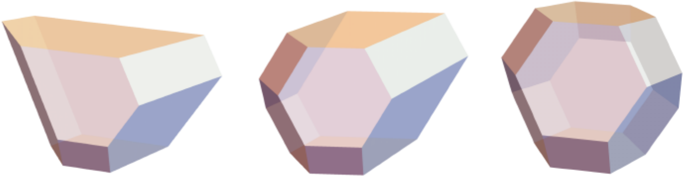
Qu'est-ce que la géométrie discrète ?

- Étude des *polytopes*...



Qu'est-ce que la géométrie discrète ?

- Étude des *polytopes*...



- ...en toutes dimensions !

$d = 0$

Qu’est-ce que la géométrie discrète ?

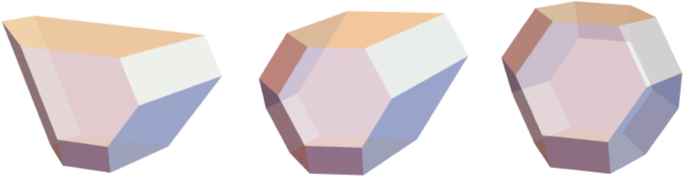
- Étude des *polytopes*...

- ...en toutes dimensions !

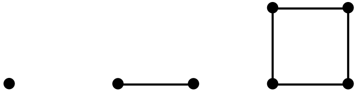
$d = 0$ $\qquad$ $d = 1$

Qu'est-ce que la géométrie discrète ?

- Étude des *polytopes*...



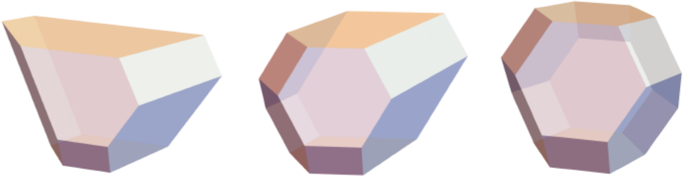
- ...en toutes dimensions !



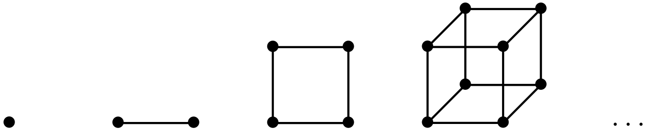
$d = 0$ $d = 1$ $d = 2$

Qu'est-ce que la géométrie discrète ?

- Étude des *polytopes*...



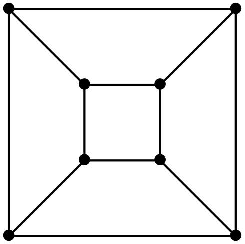
- ...en toutes dimensions !



$d = 0$ $d = 1$ $d = 2$ $d = 3$

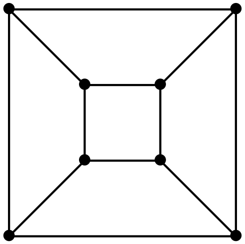
Qu'est-ce que la géométrie discrète ?

- Les cubes de dimensions 3 et 4

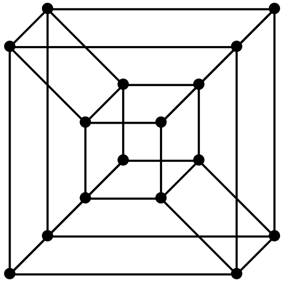


$d = 3$

- Les cubes de dimensions 3 et 4



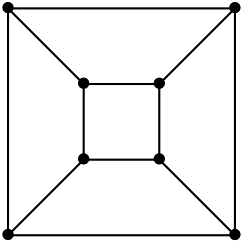
$d = 3$



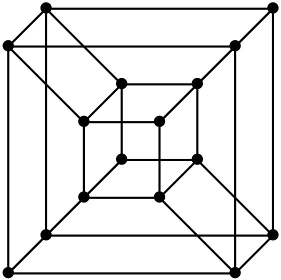
$d = 4$

Qu'est-ce que la géométrie discrète ?

- Les cubes de dimensions 3 et 4



$d = 3$



$d = 4$

À retenir

Les polytopes généralisent les polygones et polyèdres *à toutes les dimensions*.

Ma thèse

Problème

Trouver une formule explicite pour le produit tensoriel d'opérades à homotopie près

Ma thèse

Problème

Trouver une formule explicite pour le produit tensoriel d'opérades à homotopie près

- Difficile d'approche algébriquement, mais on peut passer par la géométrie discrète...

Ma thèse

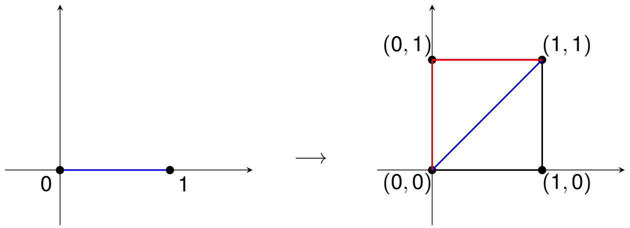
Problème

Trouver une formule explicite pour le produit tensoriel d'opérades à homotopie près

- Difficile d'approche algébriquement, mais on peut passer par la géométrie discrète...

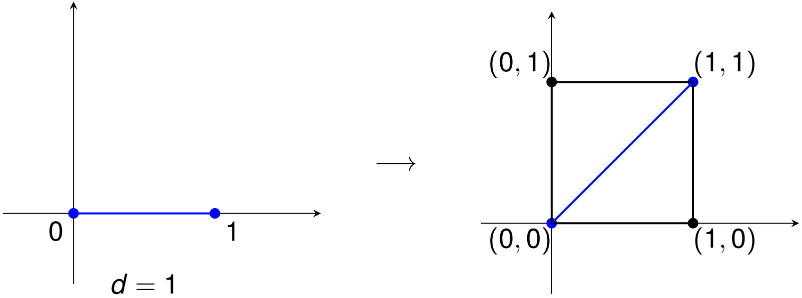
Problème

Décrire une diagonale cellulaire pour une famille de polytopes



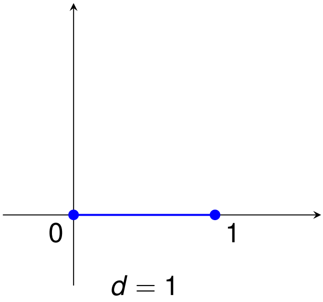
La diagonale d'un polytope...

$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & P & \rightarrow & P \times P \\ & & x & \mapsto & (x, x) \end{array}$$

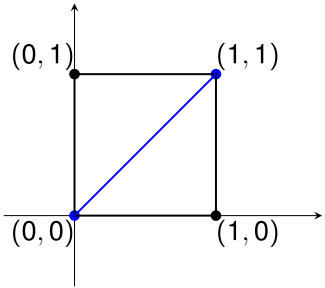


La diagonale d'un polytope...

$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & P & \to & P \times P \\ & & x & \mapsto & (x, x) \end{array}$$



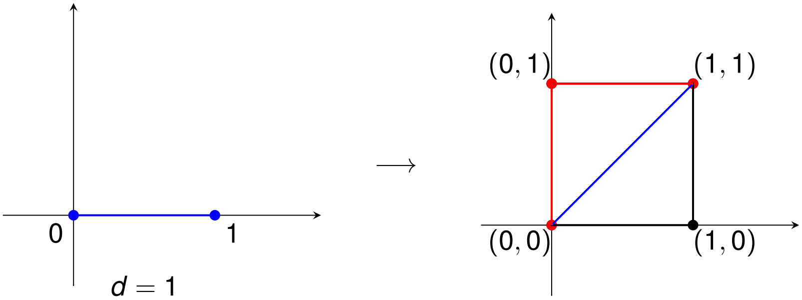
$\longrightarrow$



- ...n'est pas cellulaire !

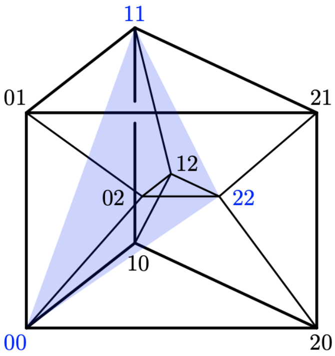
La diagonale d'un polytope...

$$\begin{array}{rccc} \Delta & : & P & \to & P \times P \\ & & x & \mapsto & (x, x) \end{array}$$



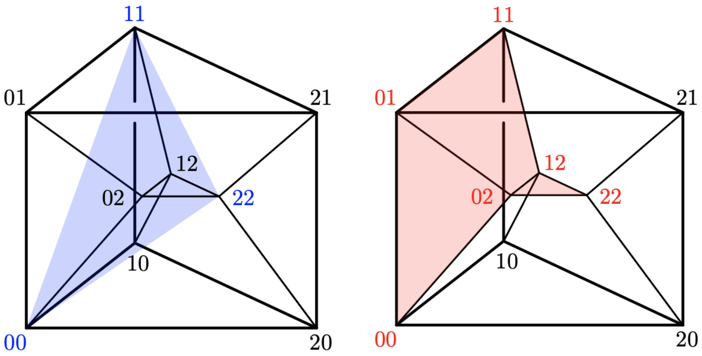
- ...n'est pas cellulaire !
- on lui cherche une approximation cellulaire

La diagonale d'un polytope...



$$d = 2$$

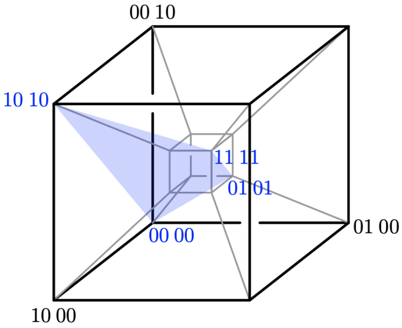
- ...n'est pas cellulaire !



$$d = 2$$

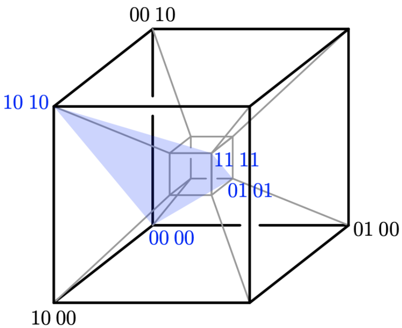
- ...n'est pas cellulaire !
- on lui cherche une approximation cellulaire

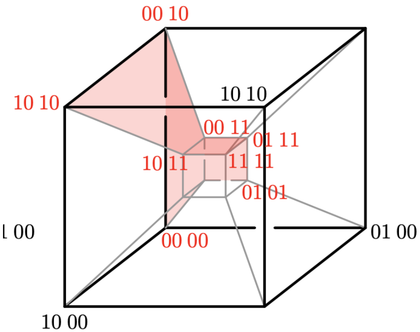
La diagonale d'un polytope...



$$d = 2$$

- ...n'est pas cellulaire !





$$d = 2$$

- ...n’est pas cellulaire !
- on lui cherche une approximation cellulaire

Résultats

Dans ma thèse, j'ai

- Développé une *théorie générale* des diagonales cellulaires de polytopes,

Résultats

Dans ma thèse, j'ai

- Développé une *théorie générale* des diagonales cellulaires de polytopes,
- Donné pour la première fois une *formule combinatoire* pour les décrire.

Résultats

Dans ma thèse, j'ai

- Développé une *théorie générale* des diagonales cellulaires de polytopes,
- Donné pour la première fois une *formule combinatoire* pour les décrire.

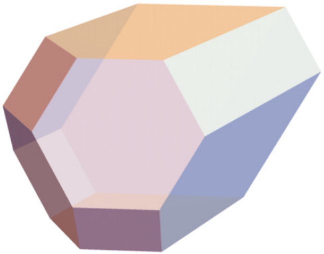
J'ai ensuite appliqué cette théorie à deux familles de polytopes qui encodent des structures algébriques venant de la topologie

Résultats

Dans ma thèse, j'ai

- Développé une *théorie générale* des diagonales cellulaires de polytopes,
- Donné pour la première fois une *formule combinatoire* pour les décrire.

J'ai ensuite appliqué cette théorie à deux familles de polytopes qui encodent des structures algébriques venant de la topologie

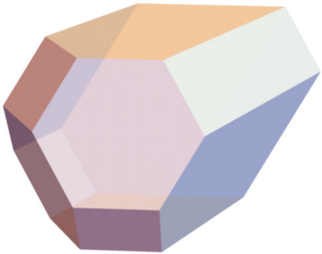


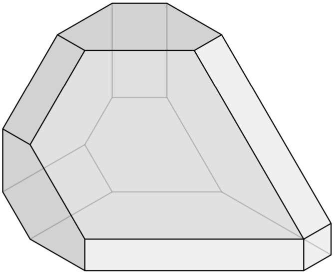
Résultats

Dans ma thèse, j'ai

- Développé une *théorie générale* des diagonales cellulaires de polytopes,
- Donné pour la première fois une *formule combinatoire* pour les décrire.

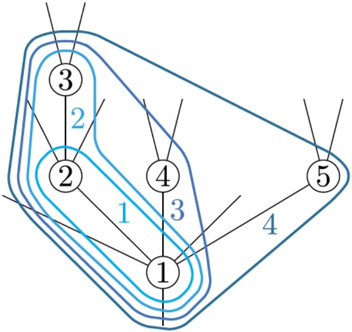
J'ai ensuite appliqué cette théorie à deux familles de polytopes qui encodent des structures algébriques venant de la topologie





Définition

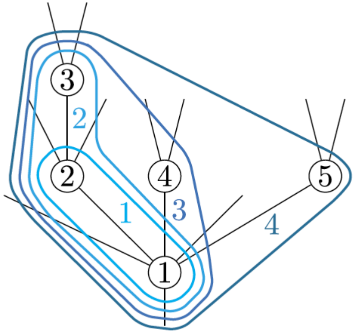
Un *opéraèdre* de dimension $k \geq 0$ est un polytope P_t dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des nichages d'un arbre planaire t à $k+2$ sommets.

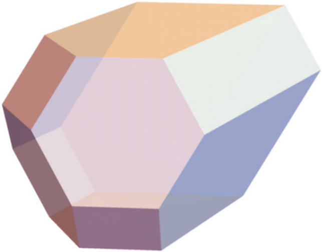


Opéraèdres

Définition

Un *opéraèdre* de dimension $k \geq 0$ est un polytope P_t dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des nichages d'un arbre planaire t à $k + 2$ sommets.

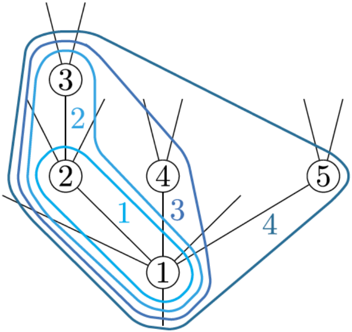


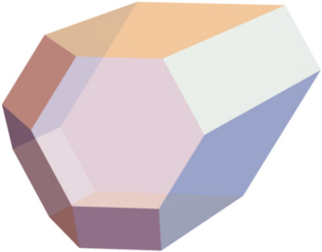


Opéraèdres

Définition

Un *opéraèdre* de dimension $k \geq 0$ est un polytope P_t dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des nichages d'un arbre planaire t à $k+2$ sommets.

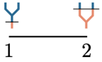


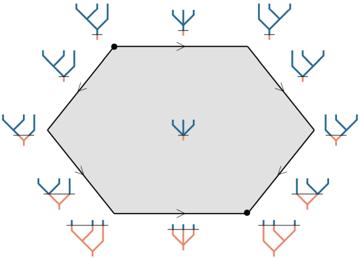


Les opéraèdres encodent la notion d'opérade à homotopie près.

Définition

Un multiplièdre de dimension $n \geq 0$ est un polytope J_n dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des arbres bicolorés à $n+1$ feuilles.

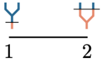


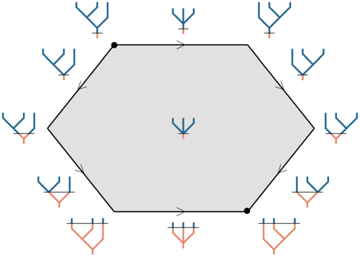


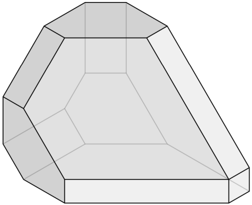
Les multiplièdres

Définition

Un multiplièdre de dimension $n \geq 0$ est un polytope J_n dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des arbres bicolorés à $n+1$ feuilles.



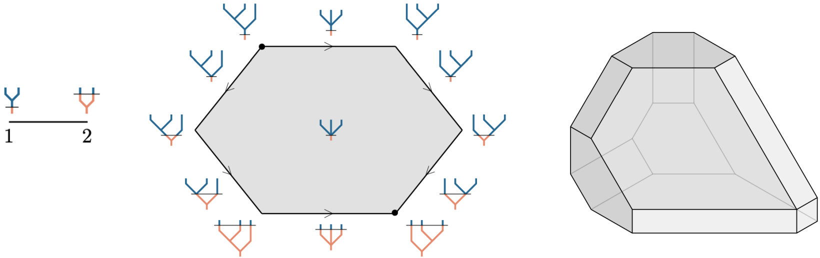




Les multiplièdres

Définition

Un multiplièdre de dimension $n \geq 0$ est un polytope J_n dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des arbres bicolorés à $n+1$ feuilles.



Les multiplièdres encodent la notion de morphisme infini entre algèbres A_∞.

Résultats

J'ai ainsi obtenu, comme cas particulier, la formule recherchée au départ...

Résultats

J'ai ainsi obtenu, comme cas particulier, la formule recherchée au départ...

Proposition (L.-A.)

Le produit tensoriel $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ de deux opérades à homotopie près $(\mathcal{P}, \{\mu_t\})$, $(\mathcal{Q}, \{\nu_t\})$ est donné par les opérations

$$\rho_t := \sum_{\substack{\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{N}(t) \\ |\mathcal{N}| + |\mathcal{N}'| = |V(t)| \\ \forall (I,J) \in D(|E(t)|), \exists N \in \mathcal{N}, |N \cap I| > |N \cap J| \\ \text{or } \exists N' \in \mathcal{N}', |N' \cap I| < |N' \cap J|}} \pm \mathcal{N}(\mu_t) \otimes \mathcal{N}'(\nu_t)\ \sigma_t\ ,$$

où $\mathcal{N}(\mu_t)$ and $\mathcal{N}'(\nu_t)$ représentent la composition des opérations associées aux nids de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ et où σ_t est un isomorphisme permutant les facteurs.

Résultats

J'ai ainsi obtenu, comme cas particulier, la formule recherchée au départ...

Proposition (L.-A.)

Le produit tensoriel $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$ de deux opérades à homotopie près $(\mathcal{P}, \{\mu_t\})$, $(\mathcal{Q}, \{\nu_t\})$ est donné par les opérations

$$\rho_t := \sum_{\substack{\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{N}(t) \\ |\mathcal{N}| + |\mathcal{N}'| = |V(t)| \\ \forall (I,J) \in D(|E(t)|), \exists N \in \mathcal{N}, |N \cap I| > |N \cap J| \\ \text{or } \exists N' \in \mathcal{N}', |N' \cap I| < |N' \cap J|}} \pm \mathcal{N}(\mu_t) \otimes \mathcal{N}'(\nu_t)\ \sigma_t\ ,$$

où $\mathcal{N}(\mu_t)$ and $\mathcal{N}'(\nu_t)$ représentent la composition des opérations associées aux nids de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ et où σ_t est un isomorphisme permutant les facteurs.

...ainsi qu'une formule analogue pour le produit tensoriel de morphismes A_∞.

Cette nouvelle formule peut maintenant être utilisée pour de nouveaux calculs en topologie algébrique...

$$\triangle_{(P,\vec{v})}(12) = 1|2 \times 12 \cup 12 \times 2|1$$

$$\begin{aligned}\triangle_{(P,\vec{v})}(123) &= 1|2|3 \times 123 \cup 123 \times 3|2|1 \cup 12|3 \times 2|13 \cup 13|2 \times 3|12\\ &\cup\ 2|13 \times 23|1 \cup 1|23 \times 13|2 \cup 12|3 \times 23|1 \cup 1|23 \times 3|12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle_{(P,\vec{v})}(1234) &= \mathbf{1|2|3|4 \times 1234} \cup \mathbf{1234 \times 4|3|2|1} \cup \mathbf{12|3|4 \times 2|134} \cup \mathbf{134|2 \times 4|3|12}\\
&\cup\ 12|3|4 \times 23|14 \cup \mathbf{14|23 \times 4|3|12} \cup 2|13|4 \times 23|14 \cup \mathbf{14|23 \times 4|13|2}\\
&\cup\ \mathbf{13|2|4 \times 3|124} \cup \mathbf{124|3 \times 4|2|13} \cup \mathbf{1|23|4 \times 3|124} \cup 124|3 \times 4|23|1\\
&\cup\ \mathbf{1|2|34 \times 124|3} \cup \mathbf{3|124 \times 34|2|1} \cup \mathbf{1|3|24 \times 134|2} \cup 2|134 \times 24|3|1\\
&\cup\ \mathbf{1|23|4 \times 134|2} \cup 2|134 \times 4|23|1 \cup 2|3|14 \times 234|1 \cup \mathbf{1|234 \times 14|3|2}\\
&\cup\ 2|13|4 \times 234|1 \cup \mathbf{1|234 \times 4|13|2} \cup 12|3|4 \times 234|1 \cup \mathbf{1|234 \times 4|3|12}\\
&\cup\ \mathbf{1|24|3 \times 14|23} \cup 23|14 \times 3|24|1 \cup \mathbf{1|2|34 \times 14|23} \cup 23|14 \times 34|2|1\\
&\cup\ \mathbf{1|23|4 \times 13|24} \cup 24|13 \times 4|23|1 \cup \mathbf{14|2|3 \times 4|123} \cup \mathbf{123|4 \times 3|2|14}\\
&\cup\ \mathbf{1|24|3 \times 4|123} \cup 123|4 \times 3|24|1 \cup \mathbf{1|2|34 \times 4|123} \cup \mathbf{123|4 \times 34|2|1}\\
&\cup\ \mathbf{3|14|2 \times 34|12} \cup \mathbf{12|34 \times 2|14|3} \cup \mathbf{1|3|24 \times 34|12} \cup 12|34 \times 24|3|1\\
&\cup\ \mathbf{13|4|2 \times 34|12} \cup \mathbf{12|34 \times 2|4|13} \cup \mathbf{1|23|4 \times 34|12} \cup 12|34 \times 4|23|1\\
&\cup\ 2|14|3 \times 24|13 \cup \mathbf{13|24 \times 3|14|2} \cup 12|4|3 \times 24|13 \cup \mathbf{13|24 \times 3|4|12}\\
&\cup\ 1|2|34 \times 24|13 \cup \mathbf{13|24 \times 34|2|1}\end{aligned}$$

Résultats

Cette nouvelle formule peut maintenant être utilisée pour de nouveaux calculs en topologie algébrique...

$$\triangle_{(P,\vec{v})}(12) = 1|2 \times 12 \cup 12 \times 2|1$$

$$\begin{array}{rcllllllll}
\triangle_{(P,\vec{v})}(123) & = & 1|2|3 \times 123 & \cup & 123 \times 3|2|1 & \cup & 12|3 \times 2|13 & \cup & 13|2 \times 3|12 \\
 & \cup & 2|13 \times 23|1 & \cup & 1|23 \times 13|2 & \cup & 12|3 \times 23|1 & \cup & 1|23 \times 3|12
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcllllllll}
\triangle_{(P,\vec{v})}(1234) & = & \boldsymbol{1|2|3|4 \times 1234} & \cup & \boldsymbol{1234 \times 4|3|2|1} & \cup & \boldsymbol{12|3|4 \times 2|134} & \cup & \boldsymbol{134|2 \times 4|3|12} \\
 & \cup & 12|3|4 \times 23|14 & \cup & \boldsymbol{14|23 \times 4|3|12} & \cup & 2|13|4 \times 23|14 & \cup & \boldsymbol{14|23 \times 4|13|2} \\
 & \cup & \boldsymbol{13|2|4 \times 3|124} & \cup & \boldsymbol{124|3 \times 4|2|13} & \cup & \boldsymbol{1|23|4 \times 3|124} & \cup & 124|3 \times 4|23|1 \\
 & \cup & \boldsymbol{1|2|34 \times 124|3} & \cup & \boldsymbol{3|124 \times 34|2|1} & \cup & \boldsymbol{1|3|24 \times 134|2} & \cup & 2|134 \times 24|3|1 \\
 & \cup & \boldsymbol{1|23|4 \times 134|2} & \cup & 2|134 \times 4|23|1 & \cup & 2|3|14 \times 234|1 & \cup & \boldsymbol{1|234 \times 14|3|2} \\
 & \cup & 2|13|4 \times 234|1 & \cup & \boldsymbol{1|234 \times 4|13|2} & \cup & 12|3|4 \times 234|1 & \cup & \boldsymbol{1|234 \times 4|3|12} \\
 & \cup & \boldsymbol{1|24|3 \times 14|23} & \cup & 23|14 \times 3|24|1 & \cup & \boldsymbol{1|2|34 \times 14|23} & \cup & 23|14 \times 34|2|1 \\
 & \cup & \boldsymbol{1|23|4 \times 13|24} & \cup & 24|13 \times 4|23|1 & \cup & \boldsymbol{14|2|3 \times 4|123} & \cup & \boldsymbol{123|4 \times 3|2|14} \\
 & \cup & \boldsymbol{1|24|3 \times 4|123} & \cup & 123|4 \times 3|24|1 & \cup & \boldsymbol{1|2|34 \times 4|123} & \cup & \boldsymbol{123|4 \times 34|2|1} \\
 & \cup & \boldsymbol{3|14|2 \times 34|12} & \cup & \boldsymbol{12|34 \times 2|14|3} & \cup & \boldsymbol{1|3|24 \times 34|12} & \cup & 12|34 \times 24|3|1 \\
 & \cup & \boldsymbol{13|4|2 \times 34|12} & \cup & \boldsymbol{12|34 \times 2|4|13} & \cup & \boldsymbol{1|23|4 \times 34|12} & \cup & 12|34 \times 4|23|1 \\
 & \cup & 2|14|3 \times 24|13 & \cup & \boldsymbol{13|24 \times 3|14|2} & \cup & 12|4|3 \times 24|13 & \cup & \boldsymbol{13|24 \times 3|4|12} \\
 & \cup & 1|2|34 \times 24|13 & \cup & \boldsymbol{13|24 \times 34|2|1} & & & &
\end{array}$$

...et amorce l'étude d'une nouvelle théorie !

Merci de votre attention !