Feuille 8 : Calcul d'intégrales par résidus

Exercice 1. 1. Déterminer les pôles et les résidus en chaque pôle de la fonction méromorphe $\dfrac{z^2}{1+z^4}$.

2. Calculer par résidus l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$.

Exercice 2. Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Déterminer les pôles dans le demi-plan supérieur et les résidus en ces pôles de la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$: $z \to \dfrac{ze^{ibz}}{z^4+a^4}$.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^4+a^4}\, dx$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^4+a^4}\, dx$.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\, dx$. (On remarquera que l'intégrale précédente est égale à la partie réelle de $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx$).

Exercice 4. 1. Monter qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, on ait $\sin\theta \geq c\theta$. En déduire que $\displaystyle R\int_{0}^{\pi/4} e^{-R^2\sin(2\theta)}\, d\theta$ tend vers zéro si R tend vers $+\infty$.

2. Intégrer e^{-z^2} sur le contour suivant, orienté positivement (où R est un réel strictement positif) :

Sect_Ang.pdf

3. En faisant tendre R vers l'infini, et en utilisant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

Exercice 5. 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle I = \int_{0}^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\, dx$ converge.

2. Soit $f(z)$ la fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}-]-\infty, 0]i$ par $f(z) = \dfrac{(\log z)^2}{1+z^2}$, où log désigne la détermination principale du logarithme sur l'ouvert précédent qui coïncide avec le logarithme usuel sur $]0, +\infty[$. Calculer $\int_{\Gamma_{a,R}} f(z)\, dz$, où pour $0 < a < 1 < R$ donnés, $\Gamma_{a,R}$ est le contour ci-dessous, dans lequel le grand demi-cercle γ_R est parcouru dans le sens positif et le petit γ_a dans le sens négatif :

Contour.pdf

3. Prouver que $\int_{\gamma_a} f(z)\, dz$ tend vers zéro si a tend vers zéro, et que $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$ tend vers zéro si R tend vers l'infini.

4. Calculer $\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\log z)^2}{1+z^2}\, dz$ en fonction de I.

5. Calculer explicitement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\, dx$.

Exercice 6. Soit θ_0 un angle dans $]-\pi, \pi]$. Soit f une fonction méromorphe n'ayant pas de pôle en zéro ni sur le cercle de centre 0 de rayon $R > 0$ donné, ni sur la demi-droite d'angle polaire θ_0. Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que f n'ait pas de pôle dans le disque fermé de centre zéro, de rayon ϵ. On note $\log_{\theta_0}$ la détermination du logarithme dans $\mathbb{C} - [0, +\infty[e^{i\theta_0}$ donnée par $\log_{\theta_0}(z) = r + i\theta$, si on a écrit $z = re^{i\theta}$ avec l'argument θ choisi dans l'intervalle $]-2\pi + \theta_0, \theta_0[$. Soit $\alpha > 0$ petit. On note $\Gamma_{\alpha,\epsilon,R}$ le contour formé par les deux segments $e^{i(\theta_0 \pm \alpha)}[\epsilon, R]$, et les arcs de cercle de rayon R et ϵ, d'angle polaire hors de l'intervalle $]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$ (cf. dessin ci-dessous).

Contour2.pdf

On oriente le contour de telle manière que le grand arc de cercle soit parcouru dans le sens trigonométrique, et le petit en sens inverse du sens trigonométrique. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On pose $I(\alpha, \epsilon, R) = \displaystyle\int_{\Gamma_{\alpha,\epsilon,R}} f(z)(\log_{\theta_0} z)^p\, dz$. Montrer que la limite de $I(\alpha, \epsilon, R)$ lorsque $\alpha \to 0+$ existe et vaut $I(0, \epsilon, R)$ (On vérifiera que cette dernière intégrale est bien convergente).

2. Soient γ_R le cercle de centre 0 de rayon R orienté positivement. Montrer que si A est l'ensemble des pôles de f à l'intérieur du cercle de centre 0 de rayon $R > 0$, on a

$$2i\pi \sum_{a \in A} \text{Rés}\,(f(z)(\log_{\theta_0} z)^p, a) = \int_{\gamma_R} f(z)(\log_{\theta_0} z)^p\, dz + \int_0^R f(re^{i\theta_0})(\log r + i(-2\pi + \theta_0))^p e^{i\theta_0}\, dr$$
$$- \int_0^R f(re^{i\theta_0})(\log r + i\theta_0)^p e^{i\theta_0}\, dr.$$

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, en appliquant le résultat de l'exercice **??** avec $\theta_0 = 0, p = 1, f(z) = (1+z^3)^{-1}$.