Feuille 5 : Principe du maximum. Application ouverte

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et ne s'annulant pas sur Ω. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(z)| \geq |f(a)|$ pour $|z-a| < \varepsilon$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, non constante, telle que $|f|$ est constant sur la frontière de Ω. Montrer que f admet un zéro dans Ω.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} |\ |z-z_0| \leq r\}$, et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $|z-z_0| = r$. Montrer que f est constante (considérer e^{if}).

Exercice 4. (Principe du maximum sur un ouvert non borné)
Soit φ une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ et pour $x \in]0,1[$, posons $M(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi(x+iy)|$. Soient $a < b$ deux réels dans $]0,1[$ avec $M(a) = M(b)$. On suppose de plus qu'il existe $C > 0, k \in \mathbb{N}$ tels que $|\varphi(z)| \leq C(1+|z|)^k$ pour tout $z \in \Omega$.

1. On pose pour $\epsilon \in]0,1[$, $\varphi_\epsilon(z) = \varphi(z)(1+\epsilon z)^{-k-1}$. Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $R_0(\epsilon,\eta)$ tel que pour tout $R > R_0(\epsilon,\eta)$, $\sup_{x\in[0,1]} |\varphi_\epsilon(x \pm iR)| \leq M(a) + \eta = M(b) + \eta$.

2. Montrer que si $R > R_0(\epsilon,\eta)$, pour tout $z \in [a,b] + i[-R,R]$, on a $|\varphi_\epsilon(z)| \leq M(a)+\eta = M(b)+\eta$.

3. Montrer que $\sup_{a\leq \operatorname{Re} z \leq b} |\varphi(z)| = M(a) = M(b)$.

Exercice 5. Pour $\alpha \in U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, on pose lorsque $z \in \overline{U}$, $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

1. Montrer que si $|z| = 1$, $|\varphi_\alpha(z)| = 1$.

2. Montrer (sans calculs !) que φ_α envoie U dans U.

3. Montrer que φ_α est une bijection de U sur U dont on déterminera l'inverse.

4. Soit $f : U \to U$ une fonction holomorphe bijective d'inverse holomorphe. Soit α un élément de U, $\beta = f(\alpha)$. Posons $g(z) = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}(z)$ et $h = g^{-1}$. Montrer que $|g'(0)| \leq 1, |h'(0)| \leq 1$.

5. Déduire des questions précédentes que toute application holomorphe bijective d'inverse holomorphe de U sur U est de la forme $\varphi_\beta^{-1} \circ M_\lambda \circ \varphi_\alpha$, où M_λ est la multiplication par une constante λ de module 1.

Exercice 6. Soit U le disque unité ouvert et f une fonction holomorphe de U dans U. On suppose que f admet au moins deux points fixes, c'est-à-dire qu'il existe α et β dans U , $\alpha \neq \beta$, tels que $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$. Montrer que f est l'identité de U. On pourra utiliser l'application φ_α définie dans l'exercice précédent pour se ramener au cas où l'un des points fixes est 0.

Exercice 7. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \Omega$ une fonction holomorphe. On suppose que $f \circ f = f$.

1. Montrer que soit $f' \equiv 0$ sur Ω, soit $f' \equiv 1$ sur $U = f(\Omega)$.

2. Lorsque f' n'est pas identiquement nulle, montrer que $f' \equiv 1$ est constante sur Ω.

3. Montrer que f est une constante ou l'identité.