Feuille 4 : Calcul d'intégrales, Fonctions méromorphes

Exercice 1. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; |xy| < 1\}$. Montrer que Ω est simplement connexe.

Exercice 2. Soit V l'ouvert de $\mathbb{C}$ donné par $V = \{z \in \mathbb{C}; z \neq it \text{ pour tout } t \text{ avec } |t| \geq 1\}$.
1. Montrer que V est simplement connexe.
2. Soit f l'unique primitive de $\dfrac{1}{1+z^2}$ sur V, vérifiant $f(0) = 0$. Que vaut $f(x)$ lorsque x est réel ? Écrire un développement limité de f au voisinage de 0.
3. Montrer que si $\operatorname{Re} z > 0$, $f(z) + f(1/z) = \pi/2$.
4. Montrer que lorsque z tend vers l'infini dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, $f(z)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\frac{1}{z}$.
5. Soit γ un lacet de $\mathbb{C} - \{-i, i\}$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ à partir de $\operatorname{Ind}_\gamma(i)$ et $\operatorname{Ind}_\gamma(-i)$. En déduire que lorsque γ est un lacet de $\mathbb{C} - [-i, i]$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0$.
6. Montrer qu'il existe f_1 holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - [-i, i]$, telle que $f_1'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.
7. Peut-on choisir f_1 telle que $f = f_1$ sur $U \cap V$? Justifier.

Exercice 3. 1. (a) Soient P, Q deux fonctions holomorphes au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, vérifiant $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$. On pose $f(z) = P(z)/Q(z)$. Montrer que $\operatorname{Rés}(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.
(b) Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions :

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad \frac{e^z}{z-1}, \quad \frac{ze^z}{z^2-1}, \quad \frac{1}{\sin \pi z}.$$

2. Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions

$$\frac{e^z}{z(z-1)^2}, \quad \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2}, \quad \frac{e^z}{(z-1)^k}, \ (k \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :
1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 1 de rayon 1, orienté positivement.
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre -2 de rayon 2, orienté positivement.
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 0 de rayon 3/2, orienté positivement.
4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^k}$, où γ est le cercle de centre 0 de rayon 5, orienté positivement, et où $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+1}$

b) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha\cos(\theta)+\alpha^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}\,,\ |\alpha| \neq 1\,.$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}\ dx}{1+x}$ $\alpha \in (0,1)\,.$

e) $\int_{\mathbb{R}} e^{izx^2} dx$ avec Im $z > 0\,.$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2\,.$

Exercice 6. 1. Déterminer les racines de l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0$.

2. Soit γ le cercle unité orienté positivement. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{2}z + 1}$.

3. Calculer l' intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}$. (On se ramènera à la question précédente en exprimant $\cos\theta$ à partir de $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$).

4. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}$.

Exercice 7. On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta, \quad B = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)\, d\theta.$$

1. Montrer que $B = 0$.

2. Calculer A (Indication : On calculera $A + iB$).

Exercice 8. 1. Déterminer les pôles et les résidus en chaque pôle de la fonction méromorphe $\displaystyle\frac{z^2}{1+z^4}$.

2. Calculer par résidus l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$.

Exercice 9. Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Déterminer les pôles dans le demi-plan supérieur et les résidus en ces pôles de la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$: $z \to \displaystyle\frac{ze^{ibz}}{z^4+a^4}$.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^4+a^4}\, dx$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^4+a^4}\, dx$.

Exercice 10. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\, dx$. (On remarquera que l'intégrale précédente est égale à la partie réelle de $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx$).

Exercice 11. 1. Monter qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, on ait $\sin\theta \geq c\theta$. En déduire que $R \displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin(2\theta)}\, d\theta$ tend vers zéro si R tend vers $+\infty$.

2. Intégrer e^{-z^2} sur le contour $[0, R] + \left\{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\} + [Re^{i\frac{\pi}{4}}, 0]$ orienté positivement (où R est un réel strictement positif).

3. En faisant tendre R vers l'infini, et en utilisant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

Exercice 12. 1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1 + x^2}\, dx$ converge.

2. Soit $f(z)$ la fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C} -]-\infty, 0]i$ par $f(z) = \dfrac{(\log z)^2}{1 + z^2}$, où log désigne la détermination principale du logarithme sur l'ouvert précédent qui coïncide avec le logarithme usuel sur $]0, +\infty[$. Calculer $\int_{\Gamma_{a,R}} f(z)\, dz$, où pour $0 < a < 1 < R$ donnés, avec $\Gamma_{a,R} = [a, R] + \left\{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\right\} + [-R, -a] - \left\{ae^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\right\}$.
3. Prouver que $\int_{\gamma_a} f(z)\, dz$ tend vers zéro si a tend vers zéro, et que $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$ tend vers zéro si R tend vers l'infini.
4. Calculer $\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\log z)^2}{1+z^2}\, dz$ en fonction de I.
5. Calculer explicitement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1 + x^2}\, dx$.

Exercice 13. Soit θ_0 un angle dans $]-\pi, \pi]$. Soit f une fonction méromorphe n'ayant pas de pôle en zéro ni sur le cercle de centre 0 de rayon $R > 0$ donné, ni sur la demi-droite d'angle polaire θ_0. Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que f n'ait pas de pôle dans le disque fermé de centre zéro, de rayon ϵ. On note $\log_{\theta_0}$ la détermination du logarithme dans $\mathbb{C} - [0, +\infty[e^{i\theta_0}$ donnée par $\log_{\theta_0}(z) = r + i\theta$, si on a écrit $z = re^{i\theta}$ avec l'argument θ choisi dans l'intervalle $]-2\pi + \theta_0, \theta_0[$. Soit $\alpha > 0$ petit. On note $\Gamma_{\alpha,\epsilon,R}$ le contour formé par les deux segments $e^{i(\theta_0 \pm \alpha)}[\epsilon, R]$, et les arcs de cercle de rayon R et ϵ, d'angle polaire hors de l'intervalle $]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$ (Faire un dessin). On oriente le contour de telle manière que le grand arc de cercle soit parcouru dans le sens trigonométrique, et le petit en sens inverse du sens trigonométrique. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On pose $I(\alpha, \epsilon, R) = \displaystyle\int_{\Gamma_{\alpha,\epsilon,R}} f(z)(\log_{\theta_0} z)^p\, dz$. Montrer que la limite de $I(\alpha, \epsilon, R)$ lorsque $\alpha \to 0+$ existe et vaut $I(0, \epsilon, R)$ (On vérifiera que cette dernière intégrale est bien convergente).
2. Soient γ_R le cercle de centre 0 de rayon R orienté positivement. Montrer que si A est l'ensemble des pôles de f à l'intérieur du cercle de centre 0 de rayon $R > 0$, on a

$$2i\pi \sum_{a \in A} \text{Rés}\,(f(z)(\log_{\theta_0} z)^p, a) = \int_{\gamma_R} f(z)(\log_{\theta_0} z)^p\, dz + \int_0^R f(re^{i\theta_0})(\log r + i(-2\pi + \theta_0))^p e^{i\theta_0}\, dr$$
$$- \int_0^R f(re^{i\theta_0})(\log r + i\theta_0)^p e^{i\theta_0}\, dr.$$

Exercice 14. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$, en appliquant le résultat de l'exercice 13 avec $\theta_0 = 0, p = 1, f(z) = (1 + z^3)^{-1}$.