# Feuille 3 : Indice. Théorème de Cauchy. Formule de Cauchy sur un ouvert convexe

**Exercice 1.** On considère les lacets suivants :

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, 2\pi], \gamma_n(t) = e^{int}$,

(ii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_+(t) = \begin{cases} e^{2it}, \text{ si } 0 \leq t \leq \pi, \\ 2 - e^{-2it}, \text{ si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

(iii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_-(t) = \begin{cases} -e^{-2it}, \text{ si } 0 \leq t \leq \pi, \\ -2 + e^{2it}, \text{ si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

Déterminer l'indice du point 0 par rapport à chacun de ces lacets.

**Exercice 2.** Indiquer sur le schéma l'indice des points des diverses composantes connexes du lacet ci-dessous par rapport à celui-ci.

**Exercice 3.** 1. Soit $C$ le cercle unité orienté positivement. Calculer $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} \, dz$. (On pourra développer $e^{xz}$ en série).

2. Montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta$.

**Exercice 4.** 1. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $F$ et $G$ deux fonctions holomorphes dans $\Omega$ et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_\gamma F(z)G'(z) \, dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma F'(z)G(z) \, dz$$

2. Calculer $\int_\gamma (z+2)e^{iz} \, dz$, où $\gamma$ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i\dfrac{t^2}{\pi^2}$ paramétré par $t$ décrivant $[0, \pi]$ (On réfléchira afin de simplifier le calcul à faire).

**Exercice 5.** En évaluant $\int_C e^z \, dz$ sur le cercle unité, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) \, d\theta = 0$$

**Exercice 6.** Calculer

$$\int_\gamma \left( z + \frac{1}{z} \right)^n \frac{dz}{z},$$

où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt$.

**Exercice 7.** Soit
$$\forall z \in D(1,1) \setminus \{1\}, f(z) = \frac{1}{z^2 - z}.$$

1. Montrer que $f$ est holomorphe sur $D(1,1) \setminus \{1\}$.

2.a. Soit $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = 1 + \frac{e^{it}}{2}$. Montrer que :
$$\mathrm{Im}\left( \int_\gamma f(z)dz \right) = 2 \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(t)}{(2 + \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt.$$

b. En déduire que
$$\int_\gamma f(z)dz \neq 0.$$

3. Conclure que $f$ n'a pas de primitive sur $D(1,1) \setminus \{1\}$.

**Exercice 8.** 1. (a) Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geq 0$
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\ e^{-int}\ dt.$$

(b) Montrer que si $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout $z$ de module $\geq R$, $f$ est un polynôme.

2. On suppose que le rayon de convergence de la série donnant $f$ est égal à 1 et que $|f(z)|(1-|z|) \leq 1$ pour tout $z$ de module strictement inférieur à 1. Montrer que pour tout $n$, $|a_n| \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)$.