Feuille 2 : Définition des fonctions holomorphes
Formules de Cauchy-Riemann, Intégration sur un chemin

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes en $z = x + iy$?

$$(i)\ f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy, \qquad (ii)\ f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$(iii)\ f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} - i\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad (iv)\ f(z) = x^2y^2 + 2ix^2y^2$$

$$(v)\ f(z) = e^{\bar{z}}, \qquad (vi)\ f(z) = e^{|z|^2}.$$

Exercice 2. 1. Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est constante, (ii) P est constante, (iii) Q est constante, (iv) $\bar{f}$ est holomorphe dans U, (v) $|f|$ est constant.

2. Soit f, g dans l'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que g ne s'annule pas dans Ω et $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = cg$.

Exercice 3. Pour $z = x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x+iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U}$ soit holomorphe sur U?

Exercice 4. 1. Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe f dans l'espace $H(U)$ des fonctions holomorphes sur U, unique, telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$.

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition trouver alors toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, u sa partie réelle et v sa partie imaginaire. On suppose que les dérivées partielles secondes de u et v existent et sont continues sur Ω. Montrer que u (resp. v) est harmonique (c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$).

Exercice 6. On dit que deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.

2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :

1. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$.
2. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. $u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x + iy; y = 0, x \leq 0\}$. (On raisonnera sur chaque ouvert $\{\pm y > 0\}$ et $\{x > 0\}$, et on utilisera suivant les cas que $\operatorname{Arctg} t$ et $-\operatorname{Arctg}(1/t)$ sont primitives de $(1 + t^2)^{-1}$).

Exercice 7. Soit $f(z) = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Montrer que les familles de courbes $u(x, y) = c_1$ et $v(x, y) = c_2$ sont orthogonales ; plus précisément, montrer qu'en tout point d'intersection $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs normales respectives sont perpendiculaires.

Exercice 8. 1. Soit $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2 - 1$. On considère les chemins paramétrés suivants:

(i) $\forall t \in [0, 1], \gamma_1(t) = t + it^2$,

(ii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_2(t) = 2e^{t+it}$,

(iii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_3(t) = \cos(t) + i \sin(2t)$.

Montrer que l'intégrale de la fonction f sur chacun des chemins considérés est bien définie, et calculer sa valeur.

2. Soit

$$\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = e^{it}.$$

On considère les fonctions suivantes:

(i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, a(z) = \frac{1}{z}$, (ii) $\forall z \in \mathbb{C}, b(z) = |z|^2$, (iii) $\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = z^2$,

(iv) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, d(z) = \frac{z^3+1}{z^2}$, (v) $\forall z \in \mathbb{C}, e(z) = \operatorname{Re}(z^2) - (\operatorname{Im} z)^2$.

Montrer que l'intégrale sur le chemin paramétré γ de chacune des fonctions considérées est bien définie, et calculer sa valeur.