# L3 Analyse 6 - TD #3

Responsable de TD: Guillaume Laplante-Anfossi

Mardi 28 avril 2020

**Exercice # 1** Déterminer l'indice du point 0 par rapport à chacun des lacets suivants :

i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, 2\pi], \gamma_n(t) = e^{int}$

Le lacet $\gamma_n$ fait $n$ fois le tour du point 0 dans le sens anti-horaire. On a donc

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(0) = n \ .$$

Ce calcul est fait dans les notes de cours [chap. 3, p.4].

ii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_+(t) = \begin{cases} e^{2it}, \text{ si } 0 \leq t \leq \pi, (= \gamma_1) \\ 2 - e^{-2it}, \text{ si } \pi \leq t \leq 2\pi. (= \gamma_2) \end{cases}$

Le lacet $\gamma_+$ peut s'exprimer comme composition de deux lacets $\gamma_1$ et $\gamma_2$ : $\gamma_+ = \gamma_2 \circ \gamma_1$. Dès lors,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_+}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) \quad .$$

Le lacet $\gamma_1$ fait une fois le tour du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans le sens anti-horaire : son indice par rapport à 0 est 1. Le lacet $\gamma_2$ fait une fois le tour du cercle de centre 2 et de rayon 1 dans le sens anti-horaire. Son indice par rapport à 0 est 0. Ainsi,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_+}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = 0 + 1 = 1 \quad .$$

iii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_-(t) = \begin{cases} -e^{-2it}, \text{ si } 0 \leq t \leq \pi, (= \gamma_1) \\ -2 + e^{2it}, \text{ si } \pi \leq t \leq 2\pi. (= \gamma_2) \end{cases}$

Le lacet $\gamma_-$ peut s'exprimer comme composition de deux lacets $\gamma_1$ et $\gamma_2$ : $\gamma_+ = \gamma_2 \circ \gamma_1$. Dès lors,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_+}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) \quad .$$

Le lacet $\gamma_1$ fait une fois le tour du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans le sens horaire : son indice par rapport à 0 est -1. Le lacet $\gamma_2$ fait une fois le tour du cercle de centre -2 et de rayon 1 dans le sens anti-horaire. Son indice par rapport à 0 est 0. Ainsi,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_+}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = 0 - 1 = -1 \quad .$$

**Exercice # 4**

1. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $F$ et $G$ deux fonctions holomorphes dans $\Omega$ et $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_\gamma F(z)G'(z)\, dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma F'(z)G(z)\, dz$$

Les fonctions $F$ et $G$ étant holomorphes, leur produit $FG(z) := F(z)G(z)$ est une fonction holomorphe, de dérivée

$$FG(z)' = F'(z)G(z) + F(z)G'(z) \ .$$

Cette dernière fonction admet donc une primitive holomorphe sur $\Omega$. Le chemin $\gamma$ étant contenu dans $\Omega$, il suffit pour intégrer $F'G+FG'$ sur $\gamma$ d'évaluer sa primitive aux extrémités de $\gamma$, c'est-à-dire

$$\int_\gamma F(z)G'(z)\ dz+\int_\gamma F'(z)G(z)\ dz = \int_\gamma F(z)G'(z)+F'(z)G(z)\ dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b))-F(\gamma(a))G(\gamma(a))\ .$$

2. Calculer $\int_\gamma (z+2)e^{iz}\ dz$, où $\gamma$ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i\dfrac{t^2}{\pi^2}$ paramétré par $t$ décrivant $[0,\pi]$ (On réfléchira afin de simplifier le calcul à faire).

   Posons $F(z) = z+2$ et $G(z) = -ie^{iz}$. Alors,

$$\int_\gamma F(z)G'(z)\ dz = \int_\gamma (z+2)e^{iz}\ dz\ .$$

   Reprenons le résultat de l'exercice précédent (il s'applique, car $F$ et $G$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, un ouvert qui en particulier contenant $\gamma$). On a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (z+2)e^{iz}\ dz &= F(\pi+i)G(\pi+i) - F(0)G(0) - \int_\gamma G(z)\ dz \\
&= (\pi+i+2)(-ie^{i(\pi+i)}) - 2(-i) + i\int_\gamma e^{iz}\ dz \\
&= (\pi+2+i)\frac{i}{e} + 2i + i(-i)\left[e^{i(\pi+i)} - 1\right] \\
&= (\pi+2+i)\frac{i}{e} + 2i - \frac{1}{e} - 1 \\
&= -\frac{2}{e} - 1 + i\left(\frac{\pi+2}{e} + 2\right)\ ,
\end{aligned}$$

   où on s'est servi du fait que $G(z) = -iG'(z)$.

**Exercice # 7** Soit

$$\forall z \in D(1,1)\setminus\{1\}, f(z) = \frac{1}{z^2-z}.$$

1. Montrer que $f$ est holomorphe sur $D(1,1)\setminus\{1\}$.

   La fonction $g = z(z-1)$ est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(1,1)\setminus\{1\}$. Dès lors, $f = 1/g$ est holomorphe sur le même domaine.

2. a) Soit $\forall t \in [0,2\pi], \gamma(t) = 1 + \frac{e^{it}}{2}$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = 2\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{(2+\cos(t))^2+\sin^2(t)}dt.$$

   Calculons l'intégrale $\int_\gamma f(z)\ dz$. On a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)}\ dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\frac{e^{it}}{2})(\frac{e^{it}}{2})}\left(\frac{ie^{it}}{2}\right)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{i}{(1+\frac{e^{it}}{2})}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2i}{(2+\cos(t))+i\sin(t)}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2i(2+\cos(t))-i\sin(t))}{(2+\cos(t))^2+\sin^2(t)}\ dt
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{(2+\cos(t))^2+\sin^2(t)}\ dt + 2i\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{(2+\cos(t))^2+\sin^2(t)}\ dt\ .$$

b) En déduire que

$$\int_\gamma f(z)dz \neq 0.$$

L'intégrande de

$$\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = 2\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{(2+\cos(t))^2+\sin^2(t)} dt.$$

est strictement positive, non-nulle, ainsi la valeur de l'intégrale est strictement positive. Ainsi, la partie imaginaire du nombre complexe $\int_\gamma f(z)\ dz$ est non-nulle. Ce nombre lui-même est donc non-nul également.

3. Conclure que $f$ n'a pas de primitive sur $D(1,1)\setminus\{1\}$.

Si $f$ admettait une primitive holomorphe sur $D(1,1)\setminus\{1\}$, alors l'intégrale sur le lacet $\gamma$, qui est contenu dans $D(1,1)\setminus\{1\}$, serait nulle.

En fait, on intègre ici une fonction méromorphe autour d'un pôle simple (d'ordre 1) et d'indice 1 par rapport à $\gamma$ : le théorème des résidus nous donnera directement que la valeur de cette intégrale est $2\pi i$ (ce que vous pouvez vérifier par le calcul). À noter que le point 0, deuxième pôle de notre fonction, ne fait pas partie du domaine considéré.