L3 Analyse 6 - TD #2

Responsable de TD: Guillaume Laplante-Anfossi

Mardi 21 avril 2020

Exercice # 1 Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes en $z = x + iy$?

i) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

Oui, pour tout $z \in \mathbb{C}$. On vérifie directement les équations de Cauchy-Riemann, ou on remarque que $f(z) = z^2$.

ii) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

Oui, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On vérifie directement les équations de Cauchy-Riemann, ou on remarque que

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \ .$$

iii) $f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} - i\frac{x}{x^2+y^2}$

Non, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On résout directement les équations de Cauchy-Riemann, ou on remarque que

$$f(z) = \frac{-iz}{|z|^2} = \frac{-iz}{z\bar{z}} = \frac{1}{i\bar{z}} \ ,$$

et on conclut à l'aide des trois faits suivants : 1) pour toute fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ne s'annulant pas sur Ω, g est holomorphe sur $\Omega \iff 1/g$ l'est ; 2) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, g est holomorphe $\iff \lambda g$ l'est ; 3) la fonction $g(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe.

iv) $f(z) = x^2y^2 + 2ix^2y^2$

Oui, seulement pour les $z = x + iy$ tels que $xy = 0$ (c'est-à-dire les nombres complexes dont la partie réelle ou la partie imaginaire est nulle). En effet, il est clair que les équations de Cauchy-Riemann sont trivialement vérifiées dans ce cas. Si on suppose $xy \neq 0$, elles correspondent aux deux équations

$$y = 2x \quad \text{et} \quad x = -2y \ ,$$

une contradiction.

v) $f(z) = e^{\bar{z}}$

Non, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes aux deux équations

$$\cos(y) = -\cos(y) \quad \text{et} \quad -\sin(y) = \sin(y) \ ,$$

qui n'ont pas de solution dans les réels (les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent jamais simultanément).

vi) $f(z) = e^{|z|^2}$

Seulement en $z = 0$. C'est la seule solution aux équations de Cauchy-Riemann dans ce cas.

Exercice # 2

1. Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   i) f est constante

   ii) P est constante

   iii) Q est constante

   iv) $\bar{f}$ est holomorphe sur Ω

   v) $|f|$ est constant

   (i) $\Longrightarrow$ (ii) est clair.

   (ii) $\Longrightarrow$ (iii) Les équations de Cauchy-Riemann impliquent que les dérivées partielles de Q sont nulles ; on conclut par connexité de Ω.

   (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Écrivons $\bar{f} = P' + iQ'$. On a $P' = P$ et $Q' = -Q$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, les dérivées partielles de P et Q sont nulles. Ainsi, les dérivées partielles de P' et Q' le sont également, et ces dernières vérifient trivialement les équations de Cauchy-Riemann à leur tour.

   (iv) $\Longrightarrow$ (v) Les fonctions f et $\bar{f}$ étant holomorphes, leur produit $f\bar{f} = |f|^2$ l'est aussi. Or ce produit est une fonction holomorphe à valeurs réelles ; les équations de Cauchy-Riemann et la connexité de Ω impliquent alors que $f\bar{f} = |f|^2$ est constante. On en déduit que $|f|$ est constante.

   (v) $\Longrightarrow$ (i) Si $|f|$ est constante, alors $|f|^2$ l'est aussi. Ceci veut dire que $P^2 + Q^2$ est constante. Si cette constante est nulle, alors $P = Q = 0$ et f est constante égale à 0. Supposons maintenant que $P^2 + Q^2 = c \in \mathbb{R}^*$. En dérivant par rapport à x et y on obtient les équations

$$\begin{aligned} P\partial_x P + Q\partial_x Q &= 0 \\ P\partial_y P + Q\partial_y Q &= 0\,. \end{aligned}$$

   En les combinant avec les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \partial_x P - \partial_y Q &= 0 \\ \partial_y P + \partial_x Q &= 0\,, \end{aligned}$$

   on obtient

$$\begin{aligned} P\partial_x P - Q\partial_y P &= 0 \\ P\partial_y P + Q\partial_x P &= 0. \end{aligned}$$

   On peut réécrire ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x P \\ \partial_y P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

   Dans l'anneau $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, la matrice

$$\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$$

   est inversible. En effet, son déterminant est $P^2 + Q^2 = c \neq 0$. Ainsi, les dérivées partielles de P sont nulles. Les équations de Cauchy-Riemann impliquent que celles de Q sont nulles également. On conclut par connexité de Ω.

2. Soient f, g dans l'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que g ne s'annule pas dans Ω et que $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = cg$.

Le fait que g ne s'annule pas sur Ω entraîne deux faits importants : la fonction $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω et la fonction $\bar{g}$ ne s'annule pas sur Ω. Mais alors

$$\frac{f}{g} = \frac{f\bar{g}}{g\bar{g}} = \frac{f\bar{g}}{|g|^2}$$

est holomorphe à valeurs réelles. Par un argument que nous venons tout juste de voir dans la preuve du 2.1, elle doit donc être constante, égale à un certain nombre réel c.

Exercice # 5 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, u sa partie réelle et v sa partie imaginaire. On suppose que les dérivées partielles secondes de u et v existent et sont continues sur Ω. Montrer que u (resp. v) est harmonique (c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$).

Écrivons les équations de Cauchy-Riemann :

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{et} \quad \partial_y u = -\partial_x v \ .$$

On dérive la première équation par rapport à y (resp. x) et la deuxième par rapport à x (resp. y). Le théorème de Schwarz (ou Clairaut) sur l'égalité des dérivées partielles croisées nous permet de conclure à l'harmonicité de u (resp. v).

Exercice # 6 On dit que deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.

   C'est précisément ce que nous venons de montrer à l'exercice 5.

2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :
   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$.
   En intégrant les équations de Cauchy-Riemann on trouve, à une constante près, $v = 2xy + y$.
   (b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
   Voir l'exercice 1 (ii).
   (c) $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$. (On raisonnera sur chaque ouvert $\{\pm y > 0\}$ et $\{x > 0\}$, et on utilisera suivant les cas que $\operatorname{Arctg} t$ et $-\operatorname{Arctg}(1/t)$ sont primitives de $(1 + t^2)^{-1}$).
   La fonction $v = -\operatorname{Arctg}(x/y)$ fournit, à une constante près, une conjuguée harmonique pour $y \neq 0$. (?)

Exercice # 8

1. Soit $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2 - 1$. Montrer que l'intégrale de la fonction f sur chacun des chemins paramétrés suivants est bien définie, et calculer sa valeur.

   Pour vérifier que l'intégrale sur un chemin est bien définie, il faut que ce chemin soit une application continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à dérivée bornée (ce dernier point implique en particulier qu'il a une longueur finie !). Il faut aussi que notre fonction f soit continue.

   i) $\forall t \in [0, 1], \gamma_1(t) = t + it^2$.

   Vérifions d'abord que la dérivée est bornée :

   $$|\gamma_1'(t)|^2 = 1 + 4t^2 \leqslant 5 \ \forall t \in [0, 1] \ .$$

   La valeur de l'intégrale

   $$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \quad \text{est} \quad -\frac{1}{3}(5 + i) \ .$$

```
ParametricPlot[{t, t^2}, {t, 0, 1}]
```

représentation graphique de courbes paramétrées

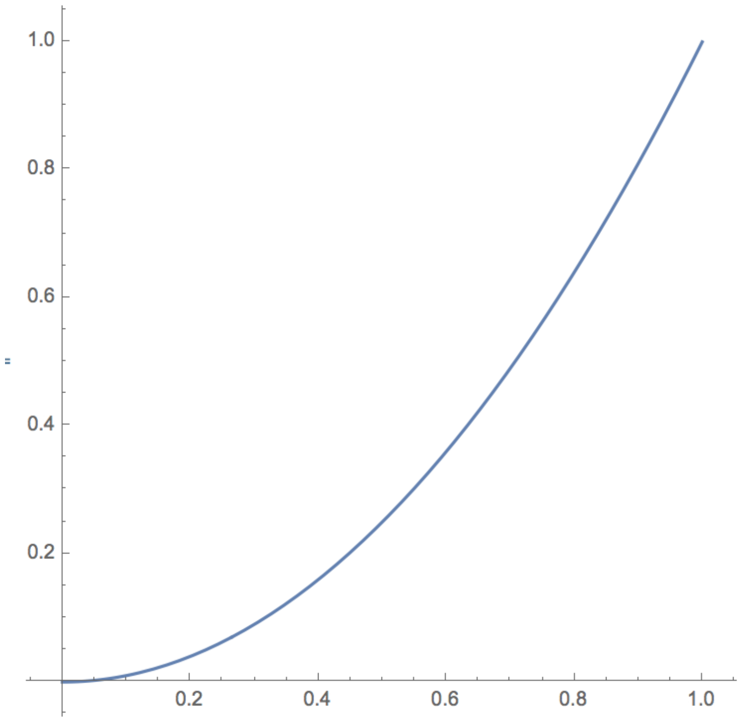

FIGURE 1 – Le chemin $\gamma_1(t)$.

ii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_2(t) = 2e^{t+it}$

Vérifions d'abord que la dérivée est bornée :

$$|\gamma_2'(t)|^2 = 8e^{2t} \leqslant 8e^{4\pi} \; \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

La valeur de l'intégrale est

$$-\frac{2}{3} - 2e^{2\pi} + \frac{8e^{6\pi}}{3} \ .$$

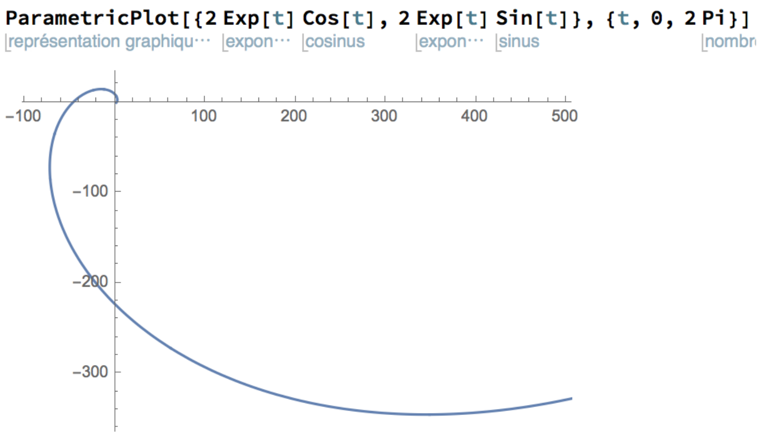

FIGURE 2 – Le chemin $\gamma_2(t)$.

iii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_3(t) = \cos(t) + i\sin(2t)$

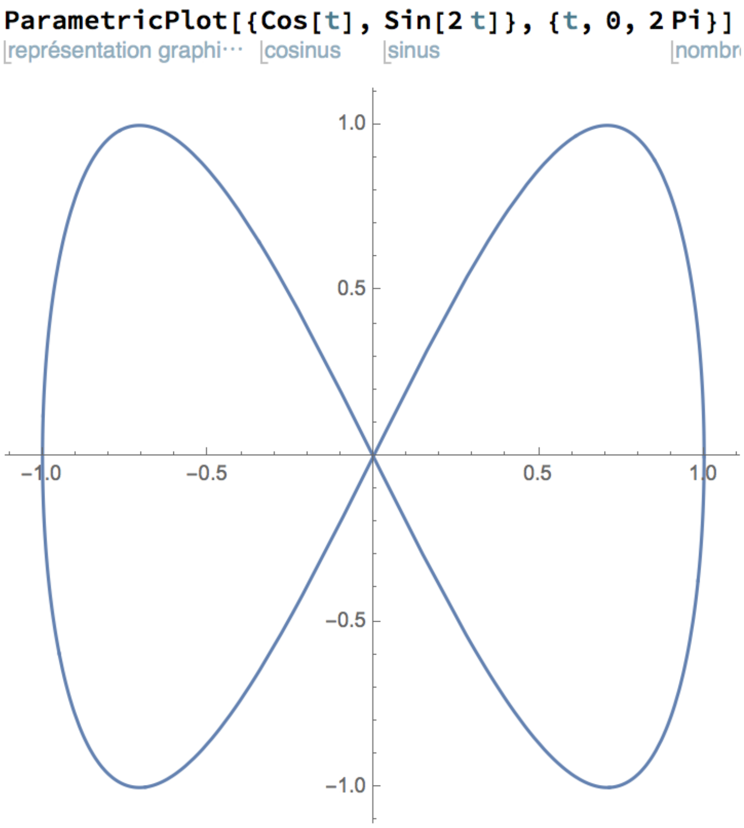

FIGURE 3 – Le chemin $\gamma_3(t)$.

Vérifions d'abord que la dérivée est bornée :

$$|\gamma_3'(t)|^2 = \sin^2(t) + 4\cos^2(2t) \leqslant 5 \ \forall t \in [0, 2\pi] \ .$$

La valeur de l'intégrale est 0. (En effet, on intègre une fonction holomorphe sur un chemin fermé...)

2. Soit

$$\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = e^{it}.$$

Montrer que l'intégrale sur le chemin paramétré γ de chacune des fonctions suivantes est bien

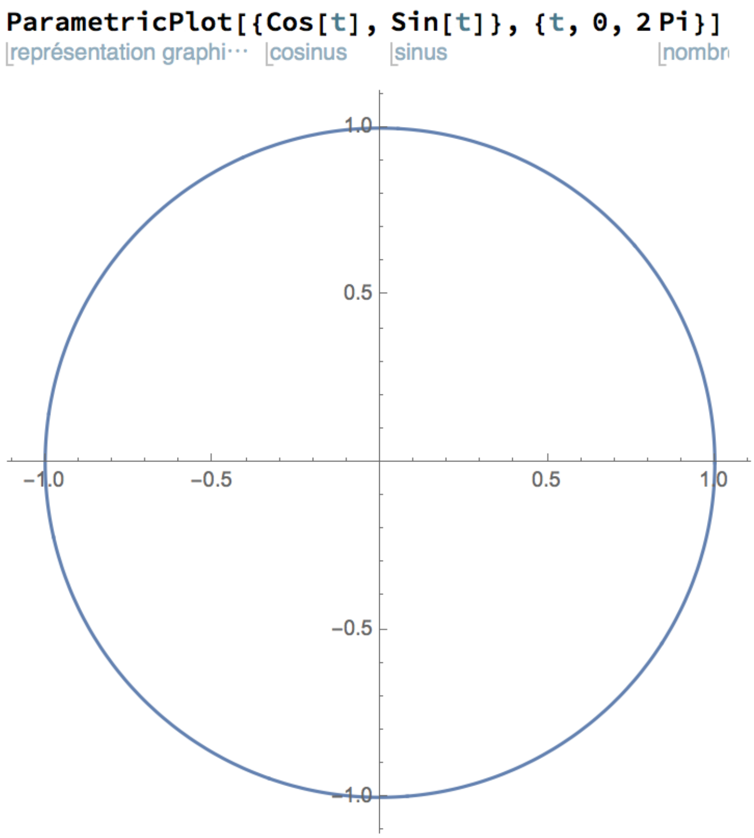

FIGURE 4 – Le chemin $\gamma(t)$.

définie, et calculer sa valeur.

Je vous laisse le soin d'argumenter en quelques mots pour vous assurer que les intégrales sont bien définies. Je vous donne les résultats pour que vous puissiez vérifier vos calculs.

i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, a(z) = \frac{1}{z}$

   L'intégrale de $a(z)$ le long de γ donne $2\pi i$ (ce calcul est fait dans les notes de cours).

ii) $\forall z \in \mathbb{C}, b(z) = |z|^2$

   L'intégrale de $b(z)$ le long de γ donne 0.

iii) $\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = z^2$

   L'intégrale de $c(z)$ le long de γ donne 0 (ce calcul est fait dans les notes de cours).

iv) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, d(z) = \frac{z^3+1}{z^2}$

   L'intégrale de $d(z)$ le long de γ donne 0 (ce calcul est fait dans les notes de cours).

v) $\forall z \in \mathbb{C}, e(z) = \operatorname{Re}(z^2) - (\operatorname{Im} z)^2$

   L'intégrale de $e(z)$ le long de γ donne 0.

A

i) Pour

ii) référence