L3 Analyse 6 - TD #1

Responsable de TD: Guillaume Laplante-Anfossi

Lundi 20 avril 2020

Exercice # 1 Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$e^z = 3, \quad e^z = -2, \quad e^z = i \ .$$

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En se servant de la formule d'Euler, on peut écrire

$$e^z = e^a \cos b + ie^a \sin b \ .$$

Tout nombre réel (par exemple, 3 ou -2) peut être vu comme un nombre complexe de partie imaginaire nulle. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles *et* leurs parties imaginaires sont égales. Ainsi, chacune des trois égalités entre nombres complexes ci-haut est équivalente à deux égalités entre nombres réels. Pour la première, on a

$$e^z = 3 \iff e^a \cos b = 3 \quad \text{et} \quad e^a \sin b = 0 \ .$$

Or l'exponentielle d'un nombre réel est toujours positive. Ainsi, la deuxième égalité implique que $\sin b = 0$ soit que $b = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mais alors, $\cos b = \pm 1$, et la première égalité implique alors $e^a = 3$ et $\cos b = 1$, soit encore $a = \ln 3$ et $b = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, il existe une infinité de solutions à la première équation ci-haut. Elles sont données par les nombres complexes de la forme

$$z = \ln 3 + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z} \ .$$

On trouve de même, pour les deuxième et troisième égalités, les solutions

$$z = \ln 2 + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

et

$$z = (4k+1)\pi i/2, k \in \mathbb{Z} \ .$$

Exercice # 2

1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
   a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe e^{e^z}.
   Considérons le nombre complexe $y := e^z$. Par définition il s'écrit de manière unique $y = a' + ib'$, pour certains $a', b' \in \mathbb{R}$. Or on a écrit plus haut que

   $$y = e^z = e^a \cos b + ie^a \sin b \ .$$

   Ainsi,

   $$a' = e^a \cos b$$

   et

   $$b' = e^a \sin b \ .$$

   On s'intéresse maintenant au nombre complexe e^y. Il s'écrit

   $$e^y = e^{a'+ib'} = e^{a'} e^{ib'} \ .$$

   Vous reconnaissez la formule polaire d'un nombre complexe : on peut identifier directement $e^{a'}$ comme son module et b' comme un de ses arguments. Notez bien que l'on dit ici *l'un* de ses arguments car l'argument d'un nombre complexe est seulement défini modulo 2π.

b) En déduire les parties réelle et imaginaire de ce nombre complexe.
Par la formule d'Euler, on a

$$e^y = e^{a'} \cos b' + i e^{a'} \sin b' \ .$$

2. Soit $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a,b) = e^{e^{a+ib}}$.
   a) On suppose que $\cos(b) < 0$. Montrer que

$$f(a,b) \underset{a \to +\infty}{\to} 0.$$

   Si $\cos(b) < 0$, alors $a' \xrightarrow{a\to+\infty} -\infty$. Ainsi $e^{a'}e^{ib'} \to 0$. En effet, le module du nombre complexe e^y tend vers 0, et selon que son argument b' est positif ou négatif, il tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) : f spirale en sens horaire (resp. anti-horaire) vers 0.

   b) On suppose que $\cos(b) > 0$. Montrer que

$$|f(a,b)| \underset{a \to +\infty}{\to} +\infty.$$

   Si $\cos(b) > 0$, alors $a' \xrightarrow{a\to+\infty} +\infty$. Ainsi $|e^{a'}e^{ib'}| = e^{a'} \to +\infty$. En effet, le module du nombre complexe e^y tend vers l'infini, et selon que son argument b' est positif ou négatif, il tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) : f spirale en sens horaire (resp. anti-horaire) vers l'infini.

   c) On suppose que $\cos(b) = 0$. Que se passe-t-il lorsque a tend vers $+\infty$?
   Si $\cos(b) = 0$, alors $a' = 0$. Ainsi $e^{a'}e^{ib'} = e^{ib'}$, qui n'admet pas de limite. En effet, le module du nombre complexe e^y est constant égal à 1 et f se promène sur le cercle unité. Selon que son argument b' est positif ou négatif, il tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) : f tourne en rond indéfiniment, en sens horaire (resp. anti-horaire).

Exercice # 3 On pose, pour z nombre complexe, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer qu'il existe un nombre complexe non nul b tel que

$$b^2 - 2ab + 1 = 0 \ .$$

   Le théorème fondamental de l'algèbre garantit l'existence d'un tel nombre.

   b) En déduire que la fonction cos est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
   D'après le Théorème I.4.1 des notes de cours de Michèle Audin [http://irma.math.unistra.fr/~maudin/analysecomp.pdf, pp.12-14], la fonction exponentielle est surjective sur $\mathbb{C}$. Ainsi, l'assertion « il existe $b \neq 0$ dans $\mathbb{C}$ tel que $b^2 - 2ab + 1 = 0$ » est équivalente à l'assertion « il existe z dans $\mathbb{C}$ tel que $e^{2iz} - 2ae^{iz} + 1 = 0$ », ce qui revient précisément à l'assertion « il existe z dans $\mathbb{C}$ tel que $\cos(z) = a$ ».

2. Montrer que la fonction sin est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
   La démonstration est la même que pour cos ; il suffit de remplacer le nombre complexe a par ia.

Exercice # 4

1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une limite f, alors pour toute suite $(t_n)_n$ de points de $[a,b]$ convergeant vers une limite α, la suite $(f_n(t_n))_n$ converge vers $f(\alpha)$.
   On veut montrer que pour toute suite $(t_n)_n$, la suite $f_n(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\alpha)$. C'est-à-dire que l'on veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $|f_n(t_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Soit donc $\varepsilon > 0$. Nous allons nous servir de l'inégalité

$$|f_n(t_n) - f(\alpha)| \leqslant |f_n(t_n) - f(t_n)| + |f(t_n) - f(\alpha)|$$

et borner chacun des deux termes de droite par $\varepsilon/2$.
Les f_n convergent vers f ; cela veut dire qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_1$,

$$|f_n(t_n) - f(t_n)| < \varepsilon/2 \ .$$

Les f_n convergent uniformément vers f, et par un théorème que vous connaissez (dites-moi si vous avez besoin d'une référence) cela entraîne que f elle-même est continue. En symboles, il existe $\delta > 0$ pour lequel

$$|t_n - \alpha| < \delta \implies |f(t_n) - f(\alpha)| < \varepsilon/2 \ .$$

Enfin, comme $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_2$,

$$|t_n - \alpha| < \delta \ .$$

Ainsi, si $n > N := \max\{N_1, N_2\}$, on a à la fois

$$|t_n - \alpha| < \delta \implies |f(t_n) - f(\alpha)| < \varepsilon/2$$

et

$$|f_n(t_n) - f(t_n)| < \varepsilon/2 \ ,$$

ce qui implique, en revenant à notre inégalité de départ, que

$$|f_n(t_n) - f(\alpha)| \leqslant |f_n(t_n) - f(t_n)| + |f(t_n) - f(\alpha)| = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

2. Calculer la limite de $(\cos(1/n))^n$ lorsque n tend vers l'infini.
   On pose
   $$(\cos(1/n))^n = e^{n \log \cos(1/n)} \ ,$$
   on calcule la limite dans l'exposant à l'aide de la règle de l'Hospital ; on obtient
   $$e^{n \log \cos(1/n)} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1 \ .$$

3. Soit $f_n(t) = n \cos^n t \sin t$.
   a) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n(t)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.
   Si $t = 0$ ou $\pi/2$, $f_n(t) = 0$ pour tout n et tend vers 0 trivialement. Si $t \in]0, \pi/2[$, $0 < \cos(t) < 1$ et $f_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. En effet, on vérifie par la règle de l'Hospital que pour $0 < a < 1$, la fonction $f(x) := xa^x$ admet 0 comme limite en $+\infty$.
   b) Montrer que la convergence n'est pas uniforme. (Indication : introduire $t_n = 1/n$).
   Supposons que la convergence est uniforme. On doit avoir par le 4.1 ci-haut que pour toute suite t_n qui tend vers 0, $f_n(t_n)$ tend vers $f(0)$. En particulier, cela doit être vrai pour $t_n = 1/n$ et on devrait avoir $f_n(1/n) \to 0$. Or, en se servant de la limite calculée en 4.2 et du fait que $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, on a
   $$f_n(1/n) = \cos(1/n)^n n \sin(1/n) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \ ,$$
   une contradiction.

Exercice # 5

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\sin(\pi t) \leq \pi(1-t)$.
   Étudions la fonction $f(x) := x - \sin(x)$. Pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = 1 + \cos(x) \geqslant 0$; f est donc croissante et comme $f(0) = 0$, elle est toujours positive ou nulle. Ainsi, pour $x \geqslant 0 \implies \sin(x) \leqslant x$. Or pour $t \in [0,1]$, on a $\pi(1-t) \geqslant 0$ et ainsi

$$\sin(\pi t) = \sin(\pi(1-t)) \leqslant \pi(1-t) \ .$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt\Big) = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(\pi t)\, dt\Big).$$

   (On pourra utiliser le théoréme de Fubini pour les séries et la question précédente).
   Le théorème de Fubini pour les séries (voir le polycopié de Grégory Ginot[https://webusers.imj-prg.fr/~gregory.ginot/2M250/LM2508polybw.pdf, p.82] pour l'énoncé exact) nous dit qu'il suffit de montrer que la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(\pi t) = \sin(\pi t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

   converge normalement sur $]0,1[$. Or par ce qui précède on a pour tout $t \in]0,1[$

$$\sin(\pi t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \leqslant \pi(1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \pi \ .$$

3. En utilisant la question précédente, montrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt\Big) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

   D'après la question précédente, il nous suffit d'étudier l'intégrale

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(\pi t)\, dt\Big) \ .$$

   Or nous savons déjà calculer la somme (c'est, comme à la question précédente, une série géométrique) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \ .$$

   En faisant le changement de variable $u := 1 - t$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\, dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi(1-u))}{u}\, du \ .$$

   Mais $\sin(\pi(1-u)) = \sin(\pi u)$ et en faisant le nouveau changement de variable $x := \pi u$ on trouve

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{u}\, du = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\, dx \ .$$

a) Pour

b) référence