

Soutenance de thèse

# Approximations cellulaires d'applications diagonales de polytopes opéradiques

**Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI**

Sous la direction de Eric HOFFBECK et Bruno VALLETTE  
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, Institut Galilée  
Université Sorbonne Paris Nord

Lundi 27 juin 2022

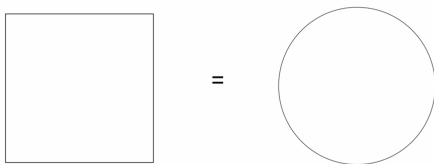
# Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Henri Poincaré (1854-1912)



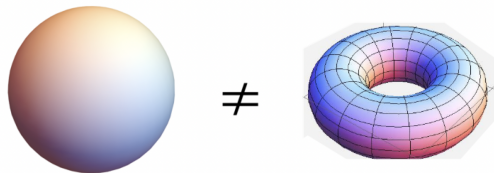
- But : comprendre la forme des objets à l'aide des nombres et leurs opérations

- Étude des formes avec une certaine flexibilité



# Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Comment distinguer la surface d'un ballon de celle d'un beignet ?



- Compter leurs trous !
- Attention : ces nombres sont en général insuffisants, il faut considérer des *ensembles* de nombres **et leurs opérations** (multiplier, élever au carré, etc.)

# Qu'est-ce que la topologie algébrique ?

- Rêve de Poincaré : décrire *entièrement* la forme des objets à l'aide de nombres et leurs opérations

## Théorème (Mandell, 2006)

*Deux objets ont la même forme si et seulement si on peut leur associer la même structure d'algèbre  $E_\infty$ .*

### COCHAINS AND HOMOTOPY TYPE

by MICHAEL A. MANDELL

#### ABSTRACT

Finite type nilpotent spaces are weakly equivalent if and only if their singular cochains are quasi-isomorphic as  $E_\infty$  algebras. The cochain functor from the homotopy category of finite type nilpotent spaces to the homotopy category of  $E_\infty$  algebras is faithful but not full.

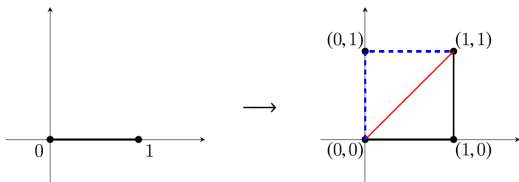
- Prix à payer : extension considérable de l'algèbre (nombres et opérations), qui intègre la "flexibilité" des formes ; c'est *l'algèbre homotopique*

# Buts de cette thèse

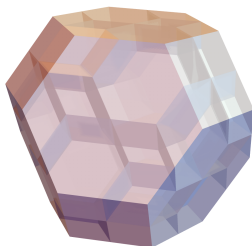
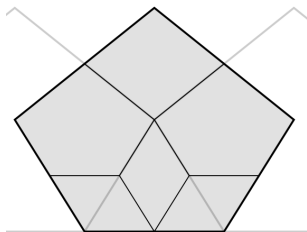
- Étude de ces nouvelles structures algébriques compliquées, à l'aide de formes simples



- À partir de cas particuliers, développer une *théorie générale*.
- Problème : la diagonale...



- Cela exige de considérer des formes un peu moins simples...



- Résultats : des formules explicites nouvelles, qui pourront servir à de nouveaux calculs en topologie algébrique

$$\rho_t := \sum_{\substack{\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{N}(t) \\ |\mathcal{N}| + |\mathcal{N}'| = |V(t)| \\ \forall (I, J) \in D(|E(t)|), \exists N \in \mathcal{N}, |N \cap I| > |N \cap J| \\ \text{or } \exists N' \in \mathcal{N}', |N' \cap I| < |N' \cap J|}} (-1)^{|Ad(\mathcal{N}) \cap Ad(\mathcal{N}')|} \text{sgn}(\sigma_{\mathcal{N}, \mathcal{N}'}) \mathcal{N}(\mu_t) \otimes \mathcal{N}'(\nu_t) \sigma_t$$

## Définition

Une algèbre  $A_\infty$  est un espace vectoriel gradué  $A$  muni d'applications  $m_n : A^{\otimes n} \rightarrow A$ ,  $n \geq 1$  de degré  $|m_n| = n - 2$ , vérifiant les relations

$$\sum_{p+q+r=n} (-1)^{p+qr} m_{p+1+r}(\text{id}^{\otimes p} \otimes m_q \otimes \text{id}^{\otimes r}) = 0 .$$

C'est une algèbre où on a relâché la relation d'associativité à homotopie près :

- $m_1$  est une différentielle
- $m_2$  est un produit
- $m_3$  est une homotopie entre  $m_2(m_2 \otimes \text{id})$  et  $m_2(\text{id} \otimes m_2)$
- $m_4$  est une homotopie entre les homotopies...

# Produit tensoriel universel d'algèbres $A_\infty$

Le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux algèbres associatives peut être muni d'une structure d'algèbre associative en posant

$$m_1^{A \otimes B} := m_1^A \otimes \text{id} + \text{id} \otimes m_1^B$$

$$m_2^{A \otimes B} := m_2^A \otimes m_2^B$$

## Problème

- Comment munir le produit tensoriel de deux algèbres  $A_\infty$  d'une structure d'algèbre  $A_\infty$  qui généralise le produit tensoriel des algèbres associatives ?
- Comment trouver une formule *universelle*, i.e. qui s'applique à toute paire d'algèbres  $A_\infty$  ?

Réponse : en étudiant la géométrie discrète (!) ...

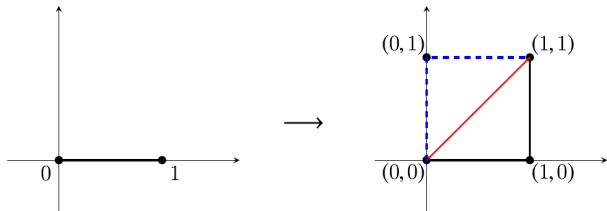


# Le problème de la diagonale

Soit  $P$  un polytope dans  $\mathbb{R}^n$ . L'application diagonale

$$\begin{aligned}\Delta &: P \rightarrow P \times P \\ x &\mapsto (x, x)\end{aligned}$$

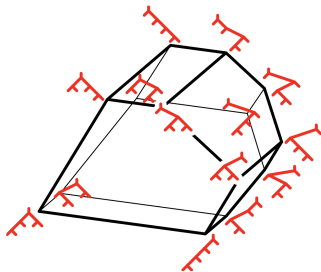
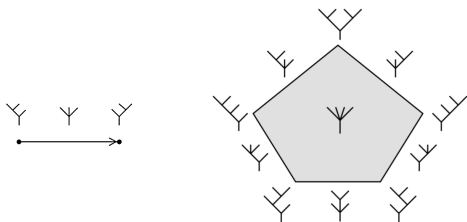
n'est pas cellulaire.



On lui cherche une *approximation cellulaire*, c'est-à-dire une application cellulaire homotope à  $\Delta$ , et qui coïncide avec  $\Delta$  sur les sommets de  $P$ .

## Définition

Un associaèdre de dimension  $n \geq 0$  est un polytope  $K_{n+2}$  dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des arbres planaires à  $n + 2$  feuilles, munis de la contraction des arêtes internes.



Il existe plusieurs réalisations de l'associaèdre.

## Proposition

L'opérade  $A_\infty$  est isomorphe aux chaînes cellulaires des associaèdres

$$C_\bullet^{\text{cell}}(K_n) \cong A_\infty(n)$$

## Proposition

Supposons que l'on sache définir, pour une famille de réalisations de l'associaèdre  $\{K_n\}_{n \geq 1}$ ,

- Une approximation cellulaire de la diagonale  $\Delta_n : K_n \rightarrow K_n \times K_n$ ,
- Une structure d'opérade topologique cellulaire compatible.

Alors, on a un produit tensoriel universel d'algèbres  $A_\infty$ .

## Démonstration.

Le foncteur  $C_\bullet^{\text{cell}}$  étant monoidal fort, on obtient une diagonale opéradique  $A_\infty \rightarrow A_\infty \otimes A_\infty$ .



Étude de deux généralisations :

- Opérades à homotopie près
- Morphismes infinis d'algèbres  $A_\infty$

Dans chaque cas, on va définir

- Des approximations cellulaires des polytopes en question
- Une structure opéradique (topologique, cellulaire) compatible

Ceci mènera, via le foncteur des chaînes cellulaires, à la définition de **produits tensoriels universels** dans chaque cas.

En fait, on développe une **théorie générale** des approximations cellulaires, applicable à de nouveaux cas.

- 1 État de l'art
  - Le travail de Masuda–Tonks–Thomas–Vallette
  - Point de départ de la thèse
- 2 Résultats
  - Théorie générale des approximations cellulaires de la diagonale d'un polytope
  - La diagonale des opéraèdres
  - La diagonale des multiplièdres
- 3 Perspectives
  - Polytopes d'épines
  - Construction de Steenrod
  - Homologie des espaces fibrés

## Définition (Billera–Sturmfels, 1992)

Le *polytope de fibre* d'une projection  $\pi : P \rightarrow Q$  est le polytope

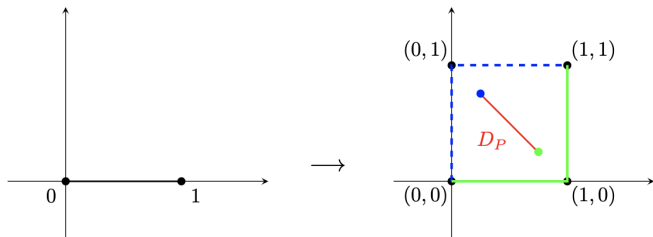
$$\Sigma(P, Q) := \left\{ \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q \gamma : \gamma \text{ est une section de } \pi \right\} .$$

- Son treillis des faces encode les subdivisions cohérentes de  $Q$ , induites par la projection  $\pi$ .
- À chaque sommet correspond une unique section  $\gamma : Q \rightarrow P$  dont l'image est une union de faces de dimension  $\dim Q$

# Une nouvelle méthode

Proposition (Masuda–Tonks–Thomas–Vallette, 2021)

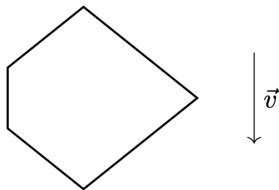
Chaque sommet du *polytope des diagonales*  $D_P := \Sigma(P \times P, P)$  associé à la projection  $(x, y) \mapsto (x + y)/2$  définit une approximation cellulaire de la diagonale de  $P$ .



Le choix d'un sommet de  $D_P$  revient à un choix de vecteur en position générique pour  $P$  lui-même.

## Définition

Un vecteur  $\vec{v}$  oriente  $P$  s'il n'est perpendiculaire à aucune arête de  $P$ .



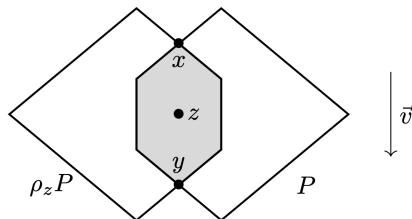
- Existe toujours ; condition de généralité.
- Induit une orientation de toutes les arêtes.
- Toute face  $F$  de  $P$  comporte alors un unique minimum  $\text{bot}_{\vec{v}}(F)$  et un unique maximum  $\text{top}_{\vec{v}}(F)$  par rapport au produit scalaire  $\langle -, \vec{v} \rangle$ .



# Formule explicite pour la diagonale

## Définition

Un vecteur  $\vec{v}$  oriente positivement  $P$  s'il n'est perpendiculaire à aucune arête de  $P \cap \rho_z P$  pour tout  $z \in P$ , où  $\rho_z P := 2z - P$ .



## Proposition (MTTV, 2021)

Si  $(P, \vec{v})$  est positivement orienté, la diagonale est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta_{(P, \vec{v})} : P &\rightarrow P \times P \\ z &\mapsto (\text{bot}(P \cap \rho_z P), \text{top}(P \cap \rho_z P)) . \end{aligned}$$

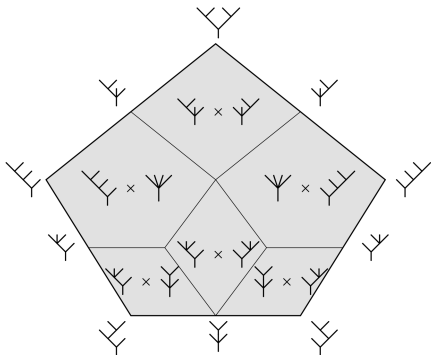
# Le travail de Masuda–Tonks–Thomas–Vallette

- 1 Choix de vecteurs d'orientations pour les réalisations de Loday des associaèdres, qui définissent des diagonales

$$\Delta_n := \Delta_{(K_n, \vec{v})} : K_n \rightarrow K_n \times K_n$$

- 2 Structure d'opérade topologique compatible : *unique!*
- 3 Preuve de la "formule magique" de Markl–Shnider

$$\text{Im } \Delta_n = \bigcup_{\text{top } F \leq \text{bot } G} F \times G .$$



# Une généralisation

On s'intéresse à un cas plus général : les opérades à homotopie près.

## Définition

Une opérade non-symétrique non-unitaire à homotopie près est une famille d'espace vectoriels  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 1}$  munie d'opérations

$$\mu_t : \mathcal{P}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(n_k) \rightarrow \mathcal{P}(n_1 + \cdots + n_k - k + 1)$$

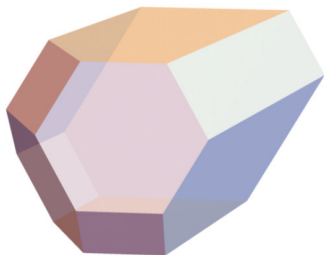
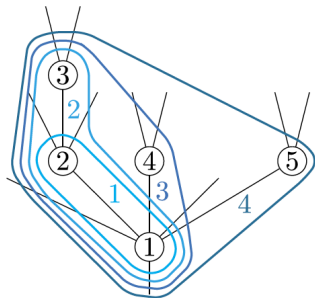
de degré  $k - 2$  pour chaque arbre  $t$  à  $k \geq 1$  sommets, où  $n_1, \dots, n_k$  sont les nombres de feuilles entrantes à chaque sommet de  $t$ , satisfaisant les relations

$$\sum_{t' \circ_i t'' = t} \pm \mu_{t'} \circ_i \mu_{t''} = 0,$$

où la somme est faite sur tous les sous-arbres  $t''$  de  $t$ .

## Définition

Un *opéraèdre* de dimension  $k \geq 0$  est un polytope  $P_t$  dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des nichages d'un arbre planaire  $t$  à  $k + 2$  sommets.



Les opéraèdres généralisent les associaèdres et encodent de manière analogue la notion d'opérade à homotopie près.

## Problème

Trouver une formule universelle pour le produit tensoriel de deux opérades non-symétriques à homotopie près.

On peut reprendre la méthode de MTTV, cependant

- Plusieurs choix de diagonales respectent l'ordre de type Tamari sur les arêtes ; compatibilité avec la structure opéradique ?
- La formule magique ne tient plus !
- La technique de preuve utilisée pour la formule magique ne se généralise pas.

—> Solution : développer une théorie générale.

## 1 État de l'art

- Le travail de Masuda–Tonks–Thomas–Vallette
- Point de départ de la thèse

## 2 Résultats

- Théorie générale des approximations cellulaires de la diagonale d'un polytope
- La diagonale des opéraèdres
- La diagonale des multiplièdres

## 3 Perspectives

- Polytopes d'épines
- Construction de Steenrod
- Homologie des espaces fibrés

# Éventail normal

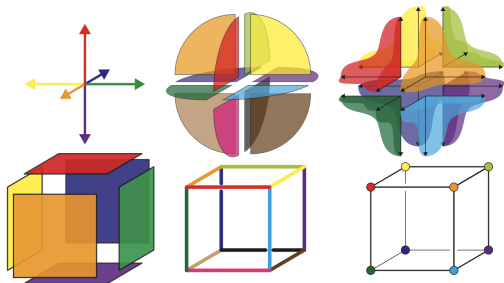
## Définition

Le *cône normal*  $\mathcal{N}_P(F)$  d'une face  $F \in \mathcal{L}(P)$ , est défini par

$$\mathcal{N}_P(F) := \left\{ c \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \forall x \in F, cx = \max_{y \in P} cy \right\} .$$

## Définition

L'*éventail normal*  $\mathcal{N}_P$  de  $P$  est l'ensemble de tous les cônes normaux des faces de  $P$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{N}_P := \{\mathcal{N}_P(F) \mid F \in \mathcal{L}(P) \setminus \emptyset\}$ .



## Proposition (L.-A.)

Pour un polyoïpe positivement orienté  $(P, \vec{v})$ , on a

$$(F, G) \in \text{Im } \Delta_{(P, \vec{v})} \iff \vec{v} \in \mathcal{N}_{P \cap \rho_z P}(G \cap \rho_z F),$$

pour tout  $z \in (\mathring{F} + \mathring{G})/2$ .

Ainsi, l'image cellulaire de la diagonale ne dépend que de l'éventail normal de  $P$ .

## Proposition (L.-A.)

Pour un polyoïpe positivement orienté  $(P, \vec{v})$ , on a

$$(F, G) \in \text{Im } \Delta_{(P, \vec{v})} \implies \text{top } F \leq \text{bot } G.$$

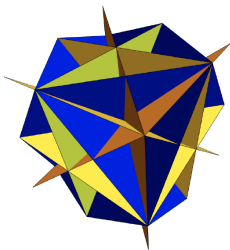
Ainsi, la formule magique est la formule "minimale".



# Arrangement d'hyperplans fondamentaux

## Définition

L'arrangement d'hyperplans fondamentaux  $\mathcal{H}_P$  d'un polytope  $P \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des hyperplans perpendiculaires aux directions des arêtes de  $P \cap (2z - P)$ , pour tout  $z \in P$ .



- Il raffine l'éventail normal de  $P$ .
- Chaque chambre définit une diagonale de  $P$ .

## Théorème (L.-A.)

Soit  $P$  un polytope positivement orienté par  $\vec{v}$ . Pour chaque  $H \in \mathcal{H}_P$ , on choisit un vecteur normal  $\vec{d}_H$  tel que  $\langle \vec{d}_H, \vec{v} \rangle > 0$ . Alors, on a

$$(F, G) \in \text{Im } \Delta_{(P, \vec{v})}$$

$$\iff \forall H \in \mathcal{H}_P, \exists i, \langle \vec{F}_i, \vec{d}_H \rangle < 0 \text{ ou } \exists j, \langle \vec{G}_j, \vec{d}_H \rangle > 0 .$$

Ici, les  $\vec{F}_i$  et les  $\vec{G}_j$  sont des vecteurs qui définissent les cônes normaux de  $F$  et  $G$ .

## Idée de démonstration.

On a vu que  $(F, G) \in \text{Im } \Delta_{(P, \vec{v})} \iff \vec{v} \in \mathcal{N}_{P \cap \rho_Z P}(G \cap \rho_Z F)$ . La chambre de  $\mathcal{H}_P$  choisie par  $\vec{v}$  est chaque fois d'un côté où de l'autre de chaque hyperplan  $H$ , et elle ne peut être contenue dans  $\mathcal{N}_{P \cap \rho_Z P}(G \cap \rho_Z F)$  que si ce cône est lui-même "du bon côté" de chaque  $H$ . □

# Invariance par dé-raffinement de l'éventail

- Cette formule nous permet d'obtenir une description combinatoire de l'image cellulaire de la diagonale pour tout polytope
- Elle est en fait valide pour tout polytope  $Q$  dont l'éventail normal est raffiné par celui de  $P$ .

## Proposition (L.-A.)

Soit  $P$  un polytope positivement orienté par  $\vec{v}$ , et soit  $Q$  un polytope dont l'éventail normal est raffiné par celui de  $P$ . Alors, on a

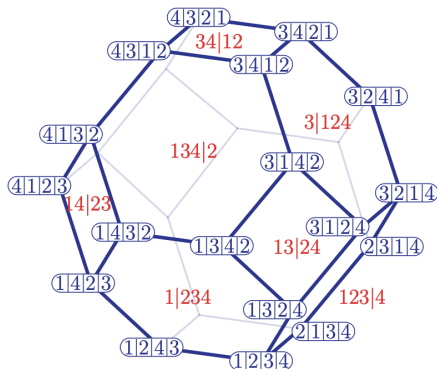
$$(F, G) \in \text{Im } \Delta_{(Q, \vec{v})}$$

$$\iff \forall H \in \mathcal{H}_P, \exists i, \langle \vec{F}_i, \vec{d}_H \rangle < 0 \text{ ou } \exists j, \langle \vec{G}_j, \vec{d}_H \rangle > 0 .$$

# Permutoèdre

## Définition

Le *permutoèdre* de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$  est l'enveloppe convexe des points  $\sum_{i=1}^n ie_{\sigma(i)} \in \mathbb{R}^n$  pour toutes les permutations  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ .



# Permutoèdre généralisé

## Définition

Un *permutoèdre généralisé* est un polytope dont l'éventail normal est raffiné par celui du permutoèdre.



Les opéraèdres sont tous des permutoèdres généralisés ; on est donc ramenés à l'étude du permutoèdre.

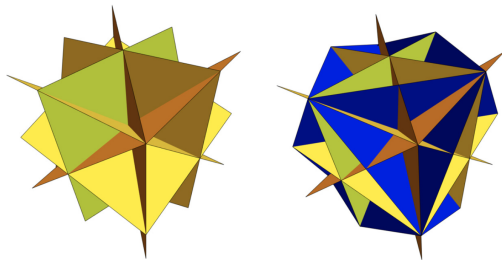
# L'arrangement fondamental du permutoèdre

## Théorème (L.-A.)

L'arrangement d'hyperplans fondamental du permutoèdre de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble d'hyperplans

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j \quad \text{pour tous } (I, J) \in D(n),$$

où  $D(n) := \{(I, J) \mid I, J \subset \{1, \dots, n\}, |I| = |J|, I \cap J = \emptyset, \min(I \cup J) \in I\}$ .



Cet arrangement raffine l'éventail de tresses.

## Définition

Un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est dit d'orientation principale si ses coordonnées satisfont les équations  $\sum_{i \in I} v_i > \sum_{j \in J} v_j$  pour tous  $(I, J) \in D(n)$ .

## Théorème (L.-A.)

- À chaque arbre planaire  $t$  on associe une réalisation de Loday de l'opéraèdre  $P_t$
- Le choix d'un vecteur d'orientation principal  $\vec{v}$ , pour chacun de ces polytopes, définit une famille de diagonales  $\Delta_{(P_t, \vec{v})} : P_t \rightarrow P_t \times P_t$
- Ce choix force une structure d'opérade colorée topologique cellulaire compatible sur la famille  $\{P_t\}$ .

(!) Choix des vecteurs cohérent avec la structure

(!) La formule magique ne tient plus !

# Produit tensoriel universel

On obtient ainsi, en appliquant le foncteur des chaînes cellulaires, une formule universelle pour le produit tensoriel d'opérades à homotopie près.

## Proposition (L.-A.)

Le produit tensoriel  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$  de deux opérades non-symétriques non-unitaires à homotopie près  $(\mathcal{P}, \{\mu_t\})$ ,  $(\mathcal{Q}, \{\nu_t\})$  est donné par les opérations

$$\rho_t := \sum_{\substack{\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{N}(t) \\ |\mathcal{N}| + |\mathcal{N}'| = |V(t)| \\ \forall (I, J) \in D(|E(t)|), \exists N \in \mathcal{N}, |N \cap I| > |N \cap J| \\ \text{or } \exists N' \in \mathcal{N}', |N' \cap I| < |N' \cap J|}} \pm \mathcal{N}(\mu_t) \otimes \mathcal{N}'(\nu_t) \sigma_t,$$

où  $\mathcal{N}(\mu_t)$  and  $\mathcal{N}'(\nu_t)$  représentent la composition des opérations associées aux nids de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  et où  $\sigma_t$  est un isomorphisme permutant les facteurs.



# Une formule nouvelle

Cette formule, facile à implémenter dans l'ordinateur, présente une combinatoire nouvelle qui reste largement inexplorée.

$$\Delta_{(P,\vec{v})}(12) = 1|2 \times 12 \cup 12 \times 2|1$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(P,\vec{v})}(123) &= 1|2|3 \times 123 \cup 123 \times 3|2|1 \cup 12|3 \times 2|13 \cup 13|2 \times 3|12 \\ &\cup 2|13 \times 23|1 \cup 1|23 \times 13|2 \cup 12|3 \times 23|1 \cup 1|23 \times 3|12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(P,\vec{v})}(1234) &= 1|2|3|4 \times 1234 \cup 1234 \times 4|3|2|1 \cup 12|3|4 \times 2|134 \cup 134|2 \times 4|3|12 \\ &\cup 12|3|4 \times 23|14 \cup 14|23 \times 4|3|12 \cup 2|13|4 \times 23|14 \cup 14|23 \times 4|13|2 \\ &\cup 13|2|4 \times 3|124 \cup 124|3 \times 4|2|13 \cup 1|23|4 \times 3|124 \cup 124|3 \times 4|23|1 \\ &\cup 1|2|34 \times 124|3 \cup 3|124 \times 34|2|1 \cup 1|3|24 \times 134|2 \cup 2|134 \times 24|3|1 \\ &\cup 1|23|4 \times 134|2 \cup 2|134 \times 4|23|1 \cup 2|3|14 \times 234|1 \cup 1|234 \times 14|3|2 \\ &\cup 2|13|4 \times 234|1 \cup 1|234 \times 4|13|2 \cup 12|3|4 \times 234|1 \cup 1|234 \times 4|3|12 \\ &\cup 1|24|3 \times 14|23 \cup 23|14 \times 3|24|1 \cup 1|2|34 \times 14|23 \cup 23|14 \times 34|2|1 \\ &\cup 1|23|4 \times 13|24 \cup 24|13 \times 4|23|1 \cup 14|2|3 \times 4|123 \cup 123|4 \times 3|2|14 \\ &\cup 1|24|3 \times 4|123 \cup 123|4 \times 3|24|1 \cup 1|2|34 \times 4|123 \cup 123|4 \times 34|2|1 \\ &\cup 3|14|2 \times 34|12 \cup 12|34 \times 2|14|3 \cup 1|3|24 \times 34|12 \cup 12|34 \times 24|3|1 \\ &\cup 13|4|2 \times 34|12 \cup 12|34 \times 2|4|13 \cup 1|23|4 \times 34|12 \cup 12|34 \times 4|23|1 \\ &\cup 2|14|3 \times 24|13 \cup 13|24 \times 3|14|2 \cup 12|4|3 \times 24|13 \cup 13|24 \times 3|4|12 \\ &\cup 1|2|34 \times 24|13 \cup 13|24 \times 34|2|1 \end{aligned}$$

Maintenant que l'on a établi la théorie nécessaire et la formule pour le permutoèdre en particulier, on peut envisager des applications à plusieurs autres familles de polytopes opéradiques.

## 1 Permutoèdres généralisés

- **Multiplièdres** (Morphismes infinis entre algèbres  $A_\infty$ )
- Multiplopéraèdres (Morphismes d'opérades à homotopie près)
- Opéraèdres modulaires (Opérades modulaires à homotopie près)

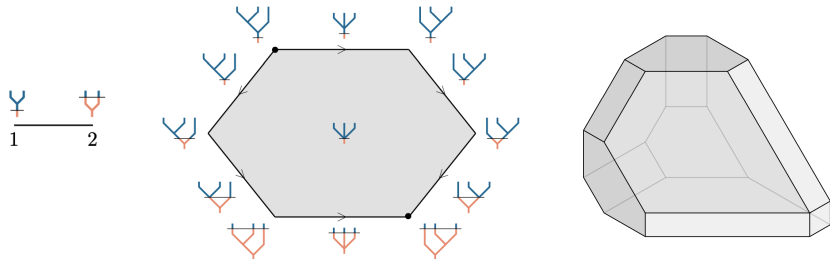
## 2 Autres familles

- 2-associaèdres (Topologie symplectique)
- Freehedra (Théorie homotopique des représentations)
- Assocoipièdres (Topologie des cordes)

Pour la première catégorie, on peut se servir directement du calcul de l'arrangement d'hyperplans fondamental du permutoèdre.

## Définition

Un multiplièdre de dimension  $n \geq 0$  est un polytope  $J_n$  dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des arbres bicolores à  $n + 1$  feuilles.



Les multiplièdres encodent la notion de morphisme infini entre algèbres  $A_\infty$ .

# La diagonale des multiplièdres

## Définition

Un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est dit de bonne orientation si ses coordonnées satisfont les équations  $v_i \geq 2v_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , et  $v_n > 0$ .

## Théorème (L.-A.–Mazuir)

- *Les réalisations de Forcey–Loday  $\{J_n\}$  des multiplièdres sont orientées positivement par les bons vecteurs d'orientation*
- *Ces choix définissent une famille de diagonales*

$$\Delta_{(J_n, \vec{v})} : J_n \rightarrow J_n \times J_n$$

- *Qui à leur tour forcent une structure de  $(\{K_n\}, \{K_n\})$ -bimodule opéradique topologique cellulaire compatible sur la famille  $\{J_n\}$ .*

(!) Choix des vecteurs cohérent avec la structure

(!) La formule magique ne tient plus !

# La diagonale des multiplièdres

Une subtilité : les réalisations de Forcey–Loday ne sont pas des permutoèdres généralisés, mais sont obtenus de réalisations qui le sont par projection.

Loday associahedron		Ardila–Doker multiplihedron		Forcey–Loday multiplihedron
$K_\omega$	$\hookrightarrow$	$K_\omega \left(\frac{1}{2}\right)$	$\xrightarrow{\pi(2\cdot)}$	$J_\omega$
$\mathbb{R}^n$	$\hookrightarrow$	$\mathbb{R}^{n+1}$	$\rightarrow$	$\mathbb{R}^n$
Gen. permutahedron		Gen. permutahedron		<i>Not</i> a gen. permutahedron

- Cette projection préserve l'orthogonalité des bons vecteurs d'orientation avec les vecteurs directeurs de  $\mathcal{H}_P$ , pour  $P$  le permutoèdre, et commute avec les diagonales.
- On peut donc appliquer directement les calculs précédents.

# Une formule nouvelle

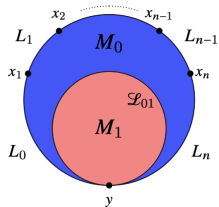
- On obtient ainsi, en appliquant le foncteur des chaînes cellulaires, une formule universelle pour le produit tensoriel de morphismes infinis entre algèbres  $A_\infty$ .
- Cette formule, facile à implémenter dans l'ordinateur, présente une combinatoire nouvelle.

<b>Pairs</b> $(F, G) \in \text{Im } \Delta_{(P, \vec{v})}$	<b>Polytopes</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	[OEI22]
$\dim F + \dim G = \dim P$	Associahedra	1	2	6	22	91	408	1938	<a href="#">A000139</a>
	Multiplihedra	1	2	8	42	254	1678	11790	to appear
	Permutahedra	1	2	8	50	432	4802	65536	<a href="#">A007334</a>
$\dim F = \dim G = 0$	Associahedra	1	3	13	68	399	2530	16965	<a href="#">A000260</a>
	Multiplihedra	1	3	17	122	992	8721	80920	to appear
	Permutahedra	1	3	17	149	1809	28399	550297	<a href="#">A213507</a>

# Applications en topologie symplectique

Cette formule explicite pourrait être utilisée pour des calculs en topologie symplectique

- 1 Homologie de Heegaard–Floer des variétés de dimension 3 et 4 (Lipshitz–Oszvath–Thurston)
- 2 Correspondances Lagrangiennes entre catégories de Fukaya associées à deux variétés symplectiques et leur produit (Fukaya, Amorim)



**Problem.** Does the diagram

$$\begin{array}{ccc} \text{Fuk}(M_0) \otimes \text{Fuk}(N_0) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{L}_M} \otimes \Phi_{\mathcal{L}_N}} & \text{Fuk}(M_1) \otimes \text{Fuk}(N_1) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Fuk}(M_0 \times N_0) & \xrightarrow{\Phi_{\tau(\mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_N)}} & \text{Fuk}(M_1 \times N_1) \end{array}$$

commutes up to homotopy of  $A_\infty$ -functors?

# La catégorie des algèbres $A_\infty$

La catégorie  $(\infty\text{-}A_\infty\text{-alg}, \otimes)$  est-elle monoïdale ?

**Proposition (L.-A.–Mazuir)**

Il n'existe pas de diagonale sur le  $(A_\infty, A_\infty)$ -bimodule opéradique  $M_\infty$  qui soit compatible avec la composition des morphismes infinis.

**Démonstration.**

Calcul direct : tentative de construire par récurrence une diagonale vérifiant la propriété désirée ; contradiction dès l'arité 2. □

- Analogue d'un résultat de Markl–Shnider selon lequel il n'existe pas de diagonale coassociative pour l'opérade  $A_\infty$ .
- On montre facilement que ces propriétés tiennent à homotopie près. Quelle est la structure homotopique sous-jacente ?



## 1 Problématique

- Motivation : produit tensoriel universel d'algèbres  $A_\infty$
- Produit tensoriel universel d'opérades à homotopie près

## 2 Résultats

- Théorie générale des approximations cellulaires de la diagonale d'un polytope
- La diagonale des opéraèdres
- La diagonale des multiplièdres

## 3 Perspectives

- Polytopes d'épines
- Construction de Steenrod
- Homologie des espaces fibrés

- Les réalisations de Loday des opérades étaient déjà dans une prépublication de V. Pilaud datant de 2013
- Font partie d'une famille plus grande de polytopes, les *polytopes d'épine*
- La structure d'opérade se généralise en une structure de *diopérade* sur ces polytopes, et donne naissance à une structure algébrique nouvelle.

## Définition (L.-A.–Pilaud)

Une *opérade supérieure* est une famille d'espaces vectoriels  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}$  munis de compositions partielles supérieures

$$\circ_i^k : \mathcal{P}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(n_k) \rightarrow \mathcal{P}(n_1 + \cdots + n_k - 1)$$

vérifiant des axiomes de composition parallèle et séquentielle.

# Construction de Steenrod

- L'approximation cellulaire de la diagonale des simplexes n'est pas invariante par l'action de  $\mathbb{S}_2 : x \otimes y \mapsto y \otimes x$
- Steenrod corrige homotopiquement ce défaut de symétrie en construisant ses fameux coproduits  $\text{cup-}i$

$$\Delta_i : C_{\bullet}^{\text{cell}}(\Delta^n) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{cell}}(\Delta^n) \otimes C_{\bullet}^{\text{cell}}(\Delta^n)$$

- En utilisant le polytope des diagonales  $D_P$ , on peut étendre cette construction au niveau topologique cellulaire, à tout polytope.

## Théorème (L.-A.–Medina-Mardones)

*Une base orthonormale générique  $\{v_i\}$  définit une construction cellulaire des coproduits  $\text{cup-}i$   $S^{\infty} \times P \rightarrow P \times P$ , pour tout polytope  $P$ .*

Soit  $C$  une cogèbre coassociative et  $A$  une algèbre associative.

- Un Maurer–Cartan  $\alpha \in \text{Hom}(C, A)$  définit une différentielle tordue sur  $C \otimes A$
- Celle-ci permet (Brown, 1958) de calculer l'homologie d'un espace fibré  $F \rightarrow X \rightarrow B$  en terme de l'homologie du produit tensoriel tordu  $C_\bullet(F) \otimes C_\bullet(B)$
- Peut-on calculer l'homologie de  $X$  en fonction des homologies de  $F$  et de  $B$ ?

# Homologie des espaces fibrés

Soit  $C$  une cogèbre  $A_\infty$  et  $A$  une algèbre  $A_\infty$ .

## Proposition (L.-A.–Mazuir)

Une diagonale sur  $A_\infty$  permet de définir l'algèbre  $A_\infty$  de convolution  $\text{Hom}(C, A)$ .

- Un Maurer–Cartan  $\alpha \in \text{Hom}(C, A)$  définit une différentielle tordue sur  $C \otimes A$
- Celle-ci permet (Kadeishvili, 1980 ; Prouté, 1986) de calculer l'homologie d'un fibré principal  $F \rightarrow X \rightarrow B$  en terme de l'homologie du produit tensoriel tordu  $H_\bullet(F) \otimes H_\bullet(B)$

## Proposition (L.-A.–Mazuir)

Une diagonale sur  $M_\infty$  permet d'associer à deux morphismes infinis  $A \rightsquigarrow A'$ ,  $C' \rightsquigarrow C$  un morphisme infini  $\text{Hom}(C, A) \rightsquigarrow \text{Hom}(C', A')$ .

On peut maintenant envisager calculer explicitement, via le théorème de transfert homotopique et les formules obtenues dans cette thèse, le Maurer–Cartan définissant le produit tensoriel tordu  $H_{\bullet}(F) \otimes H_{\bullet}(B)$ ...

$$\begin{array}{ccc} C_{\bullet}(F) \otimes C_{\bullet}(B) & & \\ \begin{array}{cc} \uparrow \downarrow & \uparrow \downarrow \\ \text{wavy} & \text{wavy} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & & \begin{array}{cc} \uparrow \downarrow & \uparrow \downarrow \\ \text{wavy} & \text{wavy} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ H_{\bullet}(F) \otimes H_{\bullet}(B) & & \end{array}$$

...et poursuivre le programme initié dans la thèse de A. Prouté en 1986, qui se concluait ainsi :

*Le calcul précédent de la structure de Kadeishvili comultiplicative de  $H_{\bullet}(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$  pour  $p$  premier impair s'arrête ici pour les raisons expliquées dans l'introduction. Il faudrait en effet pour continuer être capable d'effectuer [...] un produit tensoriel (d'ailleurs infini) de cogèbres  $A_{\infty}$ .*

Merci de votre attention !

