« Toute fct holomorphe à valeurs réelles est constante »

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Elle est de la forme

$f = u + iv$ avec $u(x,y), v(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

et vérifie les éq. de Cauchy-Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v$$
$$\partial_y u = -\partial_x v$$

Si f est à valeurs réelles, $v(x,y) \equiv 0$ sur U.

$\Rightarrow \partial_x u = \partial_y u = 0 \Rightarrow u = cst.$ sur chaque comp. connexe de U. $\square$

Feuille 3 : Indice. Théorème de Cauchy. Formule de Cauchy sur un ouvert convexe

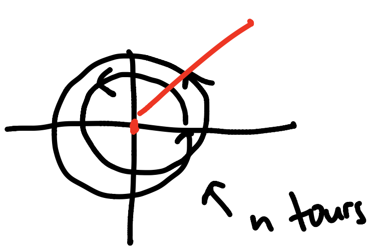
Exercice 1. On considère les lacets suivants :

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, 2\pi], \gamma_n(t) = e^{int}$,

(ii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_+(t) = \begin{cases} e^{2it}, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ 2 - e^{-2it}, & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

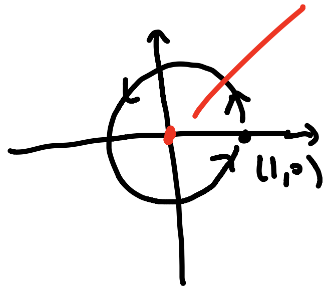
(iii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_-(t) = \begin{cases} -e^{-2it}, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ -2 + e^{2it}, & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

Déterminer l'indice du point 0 par rapport à chacun de ces lacets.

i) 

$\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(0) = n$

n tours du cercle unité



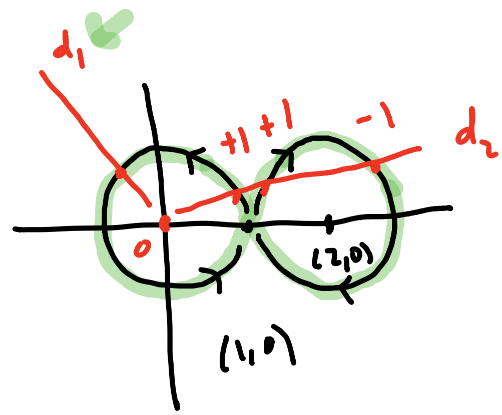
$$\gamma_n(t) = e^{int} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

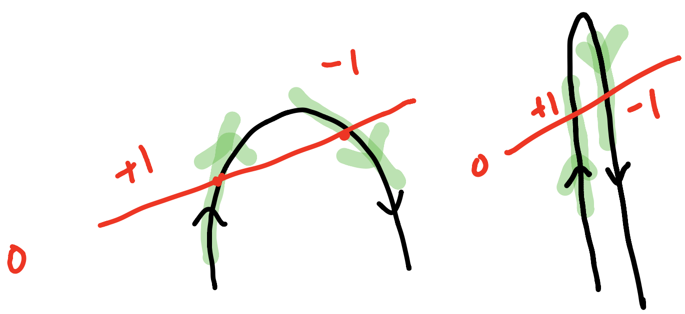
$$= \cos(nt) + i \sin(nt)$$

$$\Updownarrow$$

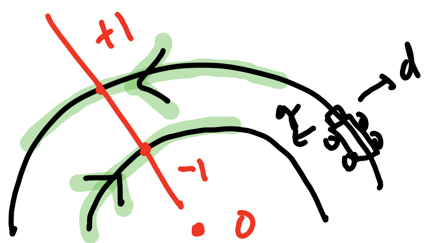
$$\gamma_n(t) = e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi n]$$

ii) $\begin{cases} e^{2it} & t \in [0, \pi] \\ 2 - e^{-2it} & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$



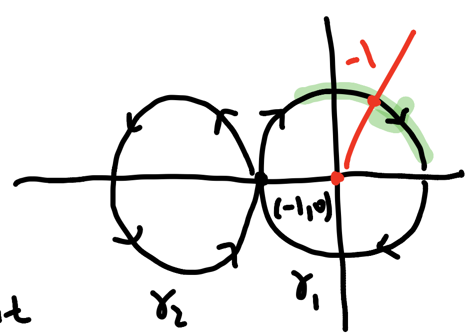


" on fait demi-tour "



$\mathrm{Ind}_{\gamma_+}(0) = 1$

iii) $\begin{cases} -e^{-2it} & t \in [0, \pi] \\ -2 + e^{2it} & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$



$$e^{2it} \to -e^{2it}$$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_-}(0) = -1 = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz}_{= -1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz}_{= 0}$$

II Théorème de Cauchy 1ère version

Théorème : Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{C})$ holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$. Alors pour tout lacet γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω on a

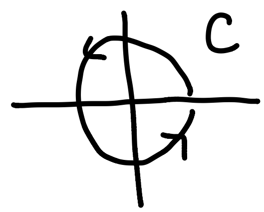
$\gamma(t_{min}) = \gamma(t_{max})$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

γ_2 est entièrement contenu dans un ouvert simpl. connexe où $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe

Exercice 3. 1. Soit C le cercle unité orienté positivement. Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz$. (On pourra développer e^{xz} en série).

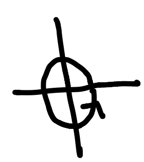
2. Montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\, d\theta$.



Calculus

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{x^n e^{xz}}{n!\, z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{x^n}{n!\, z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k z^k}{k!}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{k!\, n!} \boxed{\int_C z^{k-(n+1)}\, dz}$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k-(n+1) \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } k-n-1 = -1 \Leftrightarrow k = n \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \cancel{2\pi} i$$

$$\int_C z^m \, dz = \int_0^{2\pi} e^{imt} \, i e^{it} \, dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} \, dt = \begin{cases} \cancel{i} \left[\dfrac{e^{i(m+1)t}}{\cancel{i}(m+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

z^m, $m \geq 0$

holomorphe sur $\mathbb{C}$

$\frac{1}{z^m}$, $m > 0$

holomorphe sur $\mathbb{C}^*$

(pôle d'ordre m en 0)

Exercice 3. 1. Soit C le cercle unité orienté positivement. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz$. (On pourra développer e^{xz} en série).

2. Montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta$.

1) $$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! \, z^{n+1}} dz = i \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_c \frac{x^n e^{xz}}{n!\, z^{n+1}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{xz}}{z} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/z)^n}{n!}}_{= e^{x/z}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{x(z+1/z)}}{z}\, dz$$

$c(t) = e^{it}$

$t \in [0, 2\pi]$

$f(z) = \frac{e^{x(z+1/z)}}{z}$

on applique $\int_0^{2\pi} f(c(t))\, c'(t)\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{x(e^{it}+e^{-it})}}{e^{it}}\, i e^{it}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2x\cos t}}{\cancel{e^{it}}}\, \cancel{i e^{it}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x\cos(t)}\, dt$$

$$e^{it} + e^{-it} = \cos(t) + \cancel{i\sin(t)} + \cos(t) - \cancel{i\sin(t)}$$
$$= 2\cos(t)$$

Exercice 4. 1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, F et G deux fonctions holomorphes dans Ω et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_\gamma F(z)G'(z)\ dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma F'(z)G(z)\ dz$$

2. Calculer $\int_\gamma (z+2)e^{iz}\ dz$, où γ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i\dfrac{t^2}{\pi^2}$ paramétré par t décrivant $[0,\pi]$ (On réfléchira afin de simplifier le calcul à faire).

formule "d'intégration par parties"

F, G holomorphes sur Ω $\Rightarrow$ FG holomorphe sur Ω

$$(FG)'(z) = F'(z)G(z) + F(z)G'(z)$$

Comme $\gamma \subset \Omega$, par le thm de la primitive holomr.

$$\int_\gamma (FG)'(z) = FG(\gamma(b)) - FG(\gamma(a))$$

$$\int_\gamma F'(z)G(z)\,dz + \int_\gamma F(z)G'(z)\,dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a))$$

$\square$