1) Questions ?

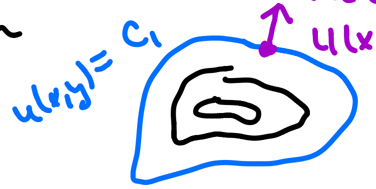
2) On reprend où on en était !

Exercice 7. Soit $f(z) = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Montrer que les familles de courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ sont orthogonales ; plus précisément, montrer qu'en tout point d'intersection $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs normales respectives sont perpendiculaires.

Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que les courbes $\boxed{u(x,y) = c_1}$ et $v(x,y) = c_2$ ont une intersection non-vide.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ un point d'intersection, tel que $f'(z_0) \neq 0$.

Les vecteurs normaux aux 2 courbes sont donnés par



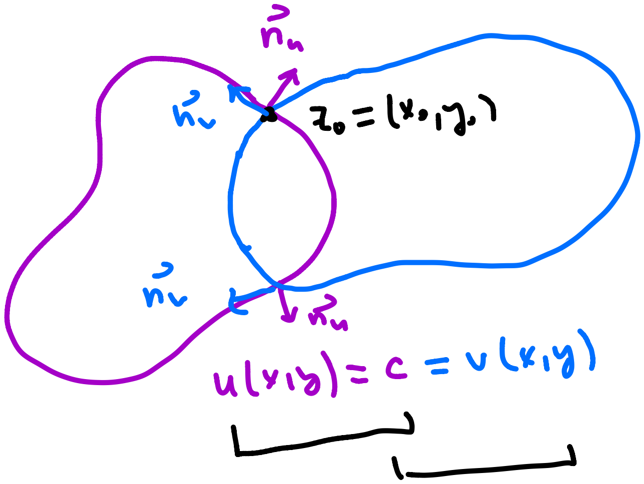
$\nabla u(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

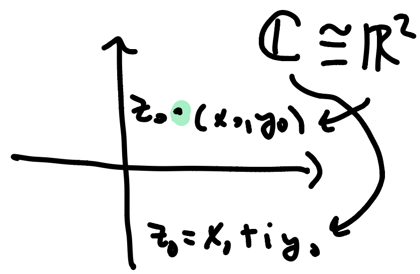
$u(x_0,y_0)$

Le gradient d'une fonction de 2 variables est en tout point perpendiculaire aux courbes de niveau.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{n}_u &= \nabla u(x_0,y_0) = (\partial_x u, \partial_y u) \\ \vec{n}_v &= \nabla v(x_0,y_0) = (\partial_x v, \partial_y v) \end{aligned}}$$

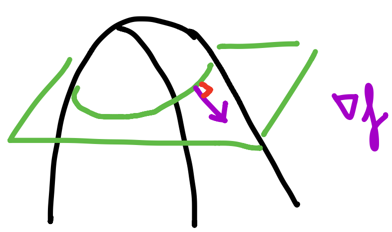
$u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$





Courbes définies implicitement ;

un vecteur normal à ces courbes est donné par le gradient



" le gradient est toujours $\perp$ aux courbes de niveau "

$$\boxed{\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = \partial_x u \, \partial_x v + \partial_y u \, \partial_y v}$$

Maintenant, f est holomorphe $\Rightarrow$ u et v vérifient les équations de Cauchy-Riemann, ainsi

$$= \partial_x u \left(-\partial_y u\right) + \partial_y u \left(\partial_x u\right)$$

$$= 0$$

$\square$

Exercice 6. On dit que deux fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann. → exercice #5.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.
2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :

1. $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$.
2. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

si u et v sont réelles.

$$\left.\begin{array}{l} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 2x+1 = \partial_y v \\ \cancel{+}2y = \cancel{+}\partial_x v \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = 2xy + y + f(x) \\ v = 2xy + f'(y) \end{array}\right\} \qquad v = 2xy + y + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

→ $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} + C$

Remarque : $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar z}{z \bar z} = \dfrac{\bar z}{|z|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2+y^2}$ ✓

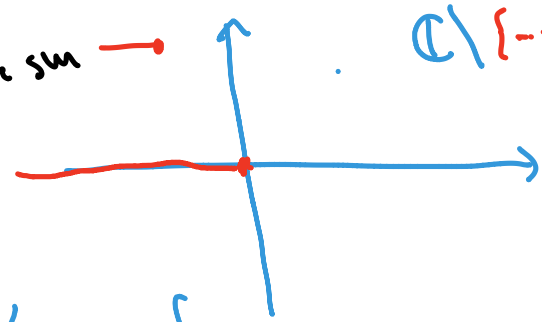
$$\underset{z}{\underset{\shortparallel}{f(x+iy)}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

u : $\shortparallel$

3. $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x+iy; y = 0, x \leq 0\}$. (On raisonnera sur chaque ouvert $\{\pm y > 0\}$ et $\{x > 0\}$, et on utilisera suivant les cas que $\operatorname{Arctg} t$ et $-\operatorname{Arctg}(1/t)$ sont primitives de $(1+t^2)^{-1}$).

$u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$

$u(x,0) = \log(x)$ $\xrightarrow{\text{pas définie sur}}$



$\mathbb{C}\setminus\{\ldots\}$

$$\partial_y v = \frac{x}{x^2+y^2} \xrightarrow{x\neq 0} \frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \xrightarrow{\int} v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

$$\partial_x v = \frac{-y}{x^2+y^2} \xrightarrow{y\neq 0} \frac{-1/y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \xrightarrow{\int} v = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c'$$

Équation fonctionnelle [modifier | modifier le code]

On peut déduire $\arctan(1/x)$ de $\arctan x$ et inversement, par les équations fonctionnelles suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan\frac{1}{t} + \arctan t = \frac{\pi}{2}\ ;$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_-^* \quad \arctan\frac{1}{t} + \arctan t = -\frac{\pi}{2}.$$

$t = \frac{y}{x}$

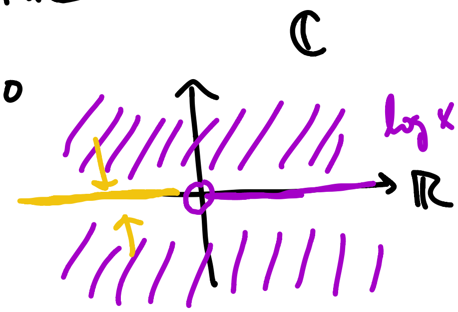
Démonstrations

d'où la nécessité de considérer différents ouverts.

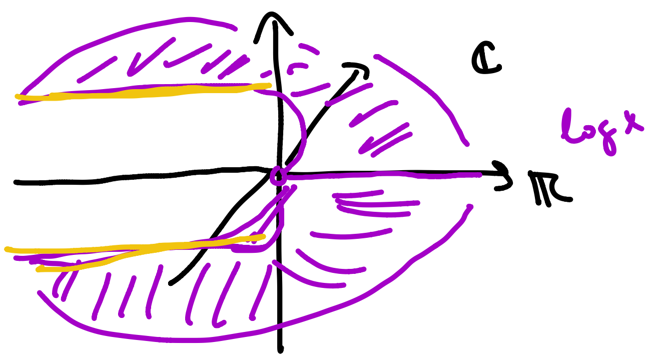
$$\boxed{v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c,\quad c \in \mathbb{R}}$$

"détermination principale du logarithme."

$y = 0 \Rightarrow u = \log x \, , \; v = 0$



vous pouvez choisir une valeur sur ; cependant vous obtiendrez une fct qui n'est pas continue



$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u(x,y) = \ln(x) \\ v(x,y) = cst \end{array}$$

Essayez de le faire séparément sur les ouverts

- $x > 0$
- $y > 0$
- $y < 0$

voyez ensuite comment "recoller" ces solutions via le choix des constantes.

(on en reparle vendredi)

Exercice 8. 1. Soit $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2 - 1$. On considère les chemins paramétrés suivants:

(i) $\forall t \in [0,1], \gamma_1(t) = t + it^2$,

→ (ii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_2(t) = 2e^{t+it}$,

→ (iii) $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma_3(t) = \cos(t) + i\sin(2t)$.

$\gamma_3(0) = \gamma_3(2\pi)$

$\Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0 \ldots$

Montrer que l'intégrale de la fonction f sur chacun des chemins considérés est bien définie, et calculer sa valeur.

Pour que $\int_\gamma$ soit bien définie, il faut que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$

- γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux
- γ est à dérivée bornée ($\Rightarrow$ en particulier, à longueur finie)

$$\forall t \in [0,1], \quad |\gamma'(t)| \leq C \quad \text{pour un certain } C \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt < +\infty$$

(i) $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 ((t+it^2)^2 - 1)(1+2it)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2it^3 - 1)(1+2it)\,dt$$

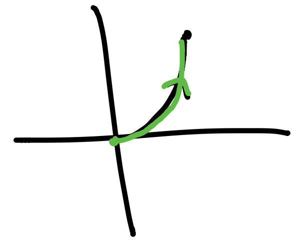
$$= \int_0^1 t^2 - t^4 + 2it^3 - 1 + 2it^3 - 2it^5 - 4t^4 - 2it \quad dt$$

$$= \int_0^1 -2it^5 - 5t^4 + 4it^3 + t^2 - 2it - 1 \; dt$$

$$= \left[-\frac{\cancel{2}it^6}{3\cancel{6}} - \cancel{5}\frac{t^5}{\cancel{5}} + \cancel{4}i\frac{t^4}{\cancel{4}} + \frac{t^3}{3} - \cancel{2}i\frac{t^2}{\cancel{2}} - t \right]_0^1$$

$$= -\frac{i}{3} - 1 \cancel{+ i} + \frac{1}{3} \cancel{- i} - 1$$

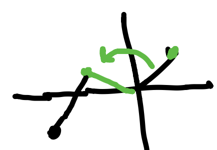
$$= -\frac{5}{3} - \frac{i}{3}$$



⚠ Il y avait un raccourci !

$f(z) = z^2 - 1$ sur $\mathbb{C}$. On remarque que f admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}$: $F(z) := \frac{z^3}{3} - z$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$



$$\left.\begin{aligned} \gamma_1(1) &= 1 + i \\ \gamma_1(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \frac{(1+i)^3}{3} - (1+i)$$

$$= -\frac{5}{3} - \frac{i}{3}$$

THM Si f est holomorphe sur U, $\gamma : [0,1] \to U$ et $\exists F$ (fct hol. sur U) telle que $F' = f$, alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

[Prop. III.1.8, p.50 des notes de Michèle Audin].

⟶ on peut voir ce théorème comme une instance particulière du théorème de Stokes.

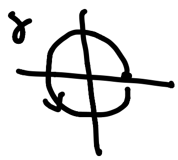
(ii) et (iii) à faire de votre côté.

$\boxed{\#8}$

2. Soit

$$\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = e^{it}.$$

γ



On considère les fonctions suivantes:

(i) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, a(z) = \frac{1}{z}$, (ii) $\forall z \in \mathbb{C}, b(z) = |z|^2$, (iii) $\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = z^2$,

(iv) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, d(z) = \frac{z^3+1}{z^2}$, (v) $\forall z \in \mathbb{C}, e(z) = \mathrm{Re}(z^2) - (\mathrm{Im}\, z)^2$.

Montrer que l'intégrale sur le chemin paramétré γ de chacune des fonctions considérées est bien définie, et calculer sa valeur.

(i) $\int_\gamma a(z)\,dz = 2\pi i$ (fait en cours)

⚠ $\frac{1}{z}$ n'admet PAS de primitive holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow$ on ne peut pas se servir du THM de Stokes

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}}\, i\cancel{e^{it}}\, dt = 2\pi i$$

(ii) $b(z)$ est-elle holomorphe ? NON!

EXERCICE POUR VENDREDI

Montrer que toute fonction holomorphe

à valeurs réelles est constante. (!)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} |e^{it}|^2\, i e^{it}\, dt$$

$$= i \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(iii) f holomorphe sur $\mathbb{C}$, γ chemin fermé $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$.

(iv) $d(z) = \dfrac{z^3+1}{z^2}$ sur $\mathbb{C}^*$

$$= z + \frac{1}{z^2}$$

$$\int_\gamma d(z)\,dz = \int_\gamma \left(z + \frac{1}{z^2}\right) dz$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_\gamma z\,dz}}_{0} + \underbrace{\cancel{\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz}}_{0}$$

, $F(z) = \dfrac{-1}{z}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^*$

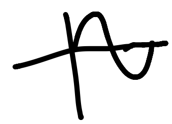
(v) $e(z) = \mathrm{Re}(z^2) - (\mathrm{Im}\, z)^2$ pas holomorphe pcq à valeurs réelles (et non-constante)

$$\int_\gamma e(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \left[\cos(2t) - \sin^2(t)\right] i\, e^{it}\, dt$$

$e^{it} \leftarrow \cos(t) + i\sin(t)$

$$= \left[i\cos(t) - \sin(t)\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos(2t) - \underbrace{\sin^2(t)}_{\frac{1-\cos(2t)}{2}}\right)\left(i\cos(t) - \sin(t)\right) dt$$



$$= \int_0^{2\pi} i\cos(t)\cos(2t) - i\cos(t)\sin^2(t)$$

* à vérifier $\quad - \cancel{\sin(t)\cos(2t)} \xrightarrow{} 0 \; + \; \cancel{\sin^3(t)} \xrightarrow{} 0 \; dt$

$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{2\pi}$

impaires et 2π-périodiques

$$= i\int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(2t) - \left(\frac{\cos(t) - \cos(t)\cos(2t)}{2}\right) dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \cos(t)\left[\frac{1}{2}(\cos(2t) - 1)\right] dt \qquad = 0$$

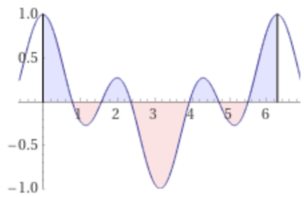
$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(2t)\,dt = 0}_{} \qquad \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt = 0}_{\checkmark}$$

↝ identité trigo.

Definite integral:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\,dx = 0$$

Visual representation of the integral:



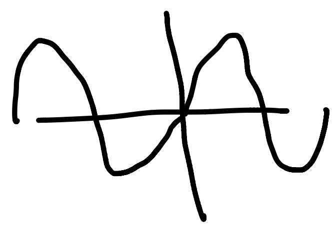
Indefinite integral:

$$\int \cos(x)\cos(2x)\,dx = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{1}{6}\sin(3x) + \text{constant}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Supposons que $f(x+2\pi) = f(x)$ $\forall x$ et impaire

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$



$u = x - \pi$

$du = dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u+\pi)\,du$$

???