Exercice 3. Pour $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x+iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U}$ soit holomorphe sur U?

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} m_n < +\infty}$$

TeXit ✓ BOT 22/03/2021

Guillaume Laplante-Anfossi

Supposons qu'il existe une famille m_n, $n \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n(x)| \leq m_n$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} m_n < +\infty$.

Alors, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement.

$u_n = t^n \sin(\pi t)$, $t \in]0,1[$.

$$\forall t \in]0,1[, \quad |t^n \sin(\pi t)| = t^n \sin(\pi t)$$

$$\leq \underbrace{t^n \pi (1-t)}_{m_n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \pi (1-t) = \pi(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$= \pi < +\infty$$

démo détaillée dans le corrigé

Exercice 3. Pour $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x+iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U}$ soit holomorphe sur U?

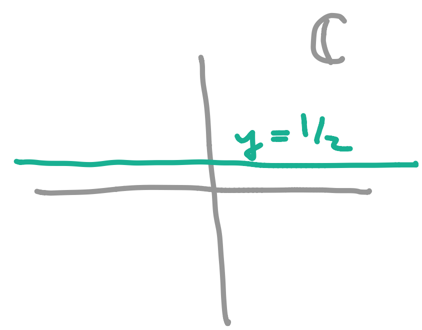
En tant que fonction de 2 variables réelles x et y, f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2iy$$

$$df = dx + 2iy\,dy$$

f est holomorphe $\iff$ f vérifie les équations de Cauchy-Riemann sur un ouvert U de $\mathbb{C}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}} \iff 2iy = i \iff y = \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow$ f vérifie les éq. de C-R sur la droite $y = \frac{1}{2}$.

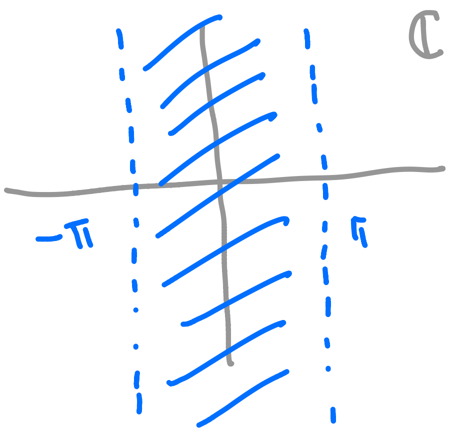
Or, la droite $y = \frac{1}{2}$ ne contient aucun ouvert de $\mathbb{C}$. Donc, f n'est nulle part holomorphe (malgré qu'elle soit différentiable au sens réel !).

Morale de l'histoire : "être holomorphe est une condition (beaucoup) plus forte que être différentiable au sens réel".

Exercice 4. 1. Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \; ; \; -\pi < x < \pi, \; y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe f dans l'espace $H(U)$ des fonctions holomorphes sur U, unique, telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$.

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition trouver alors toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.



1) Une fonction $f = P + iQ$ avec $P(x,y) = \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y}$ est holomorphe sur U $\iff$

$$\partial_y Q = \partial_x P$$
$$\partial_x Q = -\partial_y P$$

Calculons $\partial_x P = \cos x \left(\frac{1}{\cos x + \operatorname{ch} y} \right) + \sin x \left(\frac{-1}{(\cos x + \operatorname{ch} y)^2} \right)(-\sin x)$

$$= \frac{\cos^2 x + \cos x \operatorname{ch} y + \sin^2 x}{(\cos x + \operatorname{ch} y)^2} = \frac{\cos x \operatorname{ch} y + 1}{(\cos x + \operatorname{ch} y)^2}$$

$$\partial_y P = \sin x \,(-1)\left(\frac{1}{(\cos x + \mathrm{ch}\, y)^2}\right)\mathrm{sh}\, y$$

$$= \frac{-\sin x \,\mathrm{sh}\, y}{(\cos x + \mathrm{ch}\, y)^2} \qquad \mathrm{ch}\, y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

Donc,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & \partial_y Q = \dfrac{\cos x \,\mathrm{ch}\, y + 1}{(\cos x + \mathrm{ch}\, y)^2} \\[2ex] \text{(ii)} & \partial_x Q = \dfrac{\sin x \,\mathrm{sh}\, y}{(\cos x + \mathrm{ch}\, y)^2} \end{array}}$$

Quels sont les Q qui vérifient ces équations ?

$$\frac{1}{\cos x + \mathrm{ch}\, y}$$

Essai : $Q = \dfrac{\mathrm{sh}\, y}{\cos x + \mathrm{ch}\, y}$ → $\partial_y Q = ✓$; → $\partial_x Q = ✓$

$$\frac{\mathrm{ch}\, y}{\cos x + \mathrm{ch}\, y} + \frac{\mathrm{sh}\, y\,(-1)}{(\cos x + \mathrm{ch}\, y)^2}\,\mathrm{sh}\, y = \frac{\cos x \,\mathrm{ch}\, y + \underbrace{\boxed{\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y}}_{=1}}{(\cos x + \mathrm{ch}\, y)^2}$$

En intégrant (i), $Q = \frac{\operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y} + g(x)$

En intégrant (ii), $Q = \frac{\operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y} + h(y)$

$\Rightarrow g(x) = h(y) = cst = C$

En demandant $f(0) = 0$, on obtient $C = 0$ et

$Q = \frac{\operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y}$ est l'unique Q telle que

$f = P + iQ$ est holomorphe sur U. $\square$

Exercice 4. 1. Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x,y) = \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe f dans l'espace $H(U)$ des fonctions holomorphes sur U, unique, telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$.

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. entière

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition trouver alors toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

2) $\partial_y Q = \partial_x P = 2ax + 2by$

$\partial_x Q = -\partial_y P = -2bx - 2cy$

En intégrant, on trouve

$$Q = 2axy + by^2 + g(x)$$
$$Q = -bx^2 - 2cxy + h(y)$$
$\Rightarrow g(x) = -bx^2 + c$

$h(y) = by^2 + c'$

et $\boxed{a = -c.}$ Condition nécessaire et suffisante pour que $\exists f$ entière telle que $\mathrm{Re}\, f = P$.

Maintenant, tous les

$$Q = 2axy + b(y^2 - x^2) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

sont telles que $f = P + iQ \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, u sa partie réelle et v sa partie imaginaire. On suppose que les dérivées partielles secondes de u et v existent et sont continues sur Ω. Montrer que u (resp. v) est harmonique (c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$).

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

u est harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

par C-R   par C-R

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \overset{\text{par C-R}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \overset{\text{par C-R}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Schwarz

On raisonne de même pour v. $\square$

Exercice 7. Soit $f(z) = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Montrer que les familles de courbes $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ sont orthogonales ; plus précisément, montrer qu'en tout point d'intersection $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs normales respectives sont perpendiculaires.

Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que les courbes $\boxed{u(x,y) = c_1}$ et $v(x,y) = c_2$ ont une intersection non-vide.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ un point d'intersection, tel que $f'(z_0) \neq 0$.

Les vecteurs normaux aux 2 courbes sont donnés par

$$\nabla u(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Le gradient d'une fonction de 2 variables est en tout point perpendiculaire aux courbes de niveau. J'affirme que le vecteur gradient est normal à la courbe de niveau $u(x,y) = c_1$.

Question : confirmer ou infirmer ce résultat ?

Aussi, qu'est-ce qu'un vecteur tangent à la courbe en ce point ?

Exercice 6. On dit que deux fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.
2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :

   1. $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$.
   2. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

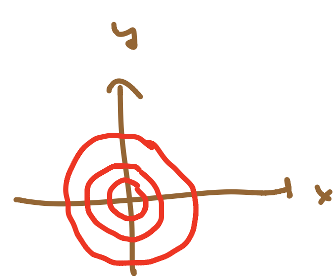
   3. $u(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x+iy; y=0, x \leq 0\}$. (On raisonnera sur chaque ouvert $\{\pm y > 0\}$ et $\{x > 0\}$, et on utilisera suivant les cas que $\mathrm{Arctg}\, t$ et $-\mathrm{Arctg}\,(1/t)$ sont primitives de $(1+t^2)^{-1}$).

→ à remettre via Moodle d'ici mercredi 7 avril

$f(x,y)$ Une courbe de niveau de f, c'est une courbe définie par $f(x,y) = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

$f(x,y) = x^2+y^2 = c$

intersection avec le plan $z = c$.



https://fr.wikipedia.org/wiki/Ligne_de_niveau