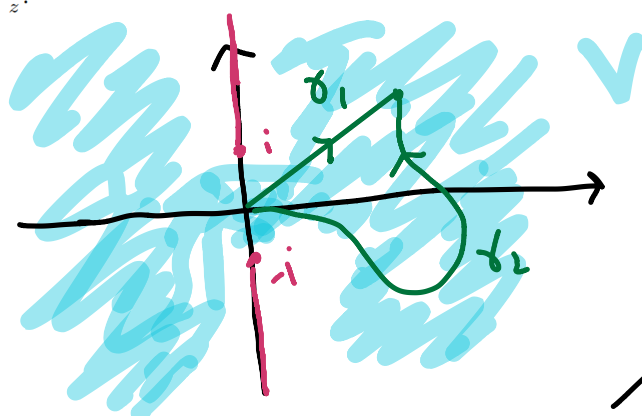
Exercice 2. Soit V l'ouvert de $\mathbb{C}$ donné par $V = \{z \in \mathbb{C}; z \neq it \text{ pour tout } t \text{ avec } |t| \geq 1\}$.

1. Montrer que V est simplement connexe.

2. Soit f l'unique primitive de $\dfrac{1}{1+z^2}$ sur V, vérifiant $f(0) = 0$. Que vaut $f(x)$ lorsque x est réel ? Écrire un développement limité de f au voisinage de 0.

3. Montrer que si $\operatorname{Re} z > 0$, $f(z) + f(1/z) = \pi/2$.

4. Montrer que lorsque z tend vers l'infini dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, $f(z)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\frac{1}{z}$.



p/r à 0

1) On a montré que V était un ouvert étoilé, et donc simplement connexe.

2) On a $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} = f(z) - f(0) = f(z)$

Lorsque $z = x + i0$, $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$$

DL de $\dfrac{1}{1+z^2}$ au voisinage de 0

$\downarrow$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-(-z^2)} = 1 - z^2 + z^4 + \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \arctan(z)$$

Exercice 2. Soit V l'ouvert de $\mathbb{C}$ donné par $V = \{z \in \mathbb{C}; z \neq it \text{ pour tout } t \text{ avec } |t| \geq 1\}$.

1. Montrer que V est simplement connexe.

2. Soit f l'unique primitive de $\dfrac{1}{1+z^2}$ sur V, vérifiant $f(0) = 0$. Que vaut $f(x)$ lorsque x est réel ? Écrire un développement limité de f au voisinage de 0.

3. Montrer que si $\operatorname{Re} z > 0$, $f(z) + f(1/z) = \pi/2$.

4. Montrer que lorsque z tend vers l'infini dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, $f(z)$ admet un développement asymptotique en puissances de $\frac{1}{z}$.

3) $$f'(z) + f'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \frac{-1}{z^2}$$

$$= \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right) = \text{cst sur } \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

ouvert connexe

$$f(1) + f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

où $f(z) + f(\frac{1}{z})$ est hol.

4) $f(z) = \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{1}{z}\right)$

Si $z \to +\infty$, $\frac{1}{z} \to 0$ et on peut appliquer le DL trouvé précédemment

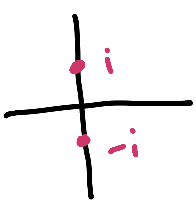
$$\Rightarrow f(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)z^{2n+1}} + \dots$$

5. Soit γ un lacet de $\mathbb{C} - \{-i, i\}$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ à partir de $\mathrm{Ind}_\gamma(i)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(-i)$. En déduire que lorsque γ est un lacet de $\mathbb{C} - [-i, i]$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

6. Montrer qu'il existe f_1 holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - [-i, i]$, telle que $f_1'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

7. Peut-on choisir f_1 telle que $f = f_1$ sur $U \cap V$? Justifier.

5)



$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = f'(z)$$

On applique le théorème des résidus :

$$\boxed{\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Ind}_\gamma(i)\, \mathrm{rés}(f', i) + 2\pi i\, \mathrm{Ind}_\gamma(-i)\, \mathrm{rés}(f', -i)}$$

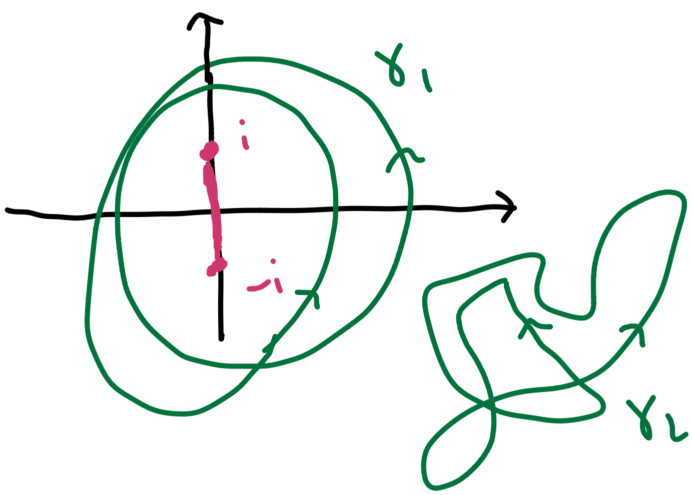
$$\text{rés}(f', i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

$$\text{rés}(f', -i) = \lim_{z \to -i} \frac{1}{z-i} = \frac{-1}{2i}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz = \pi \, \mathrm{Ind}_\gamma(i) - \pi \, \mathrm{Ind}_\gamma(-i)$$

Maintenant, si $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus [-i, i]$, on a

$$\mathrm{Ind}_\gamma(i) = \mathrm{Ind}_\gamma(-i) \Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz = 0$$



$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(i) = 2$

$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(-i) = 2$

$\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(i) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(-i) = 0$

5. Soit γ un lacet de $\mathbb{C} - \{-i, i\}$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ à partir de $\mathrm{Ind}_\gamma(i)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(-i)$. En déduire que lorsque γ est un lacet de $\mathbb{C} - [-i, i]$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

6. Montrer qu'il existe f_1 holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - [-i, i]$, telle que $f_1'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

7. Peut-on choisir f_1 telle que $f = f_1$ sur $U \cap V$? Justifier.

6) On fixe $z_0 := -2i \in U$.

Soit $z \in U$, et soit γ un chemin entre z_0 et z dans U.

On définit $f_1(z) := \int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$

Cette fct est bien définie car, si γ' est un autre chemin entre z_0 et z, on a

$$\int_{\gamma-\gamma'} \frac{dz}{1+z^2} = 0 \Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{1+z^2}$$

lacet de U — par la question précédente

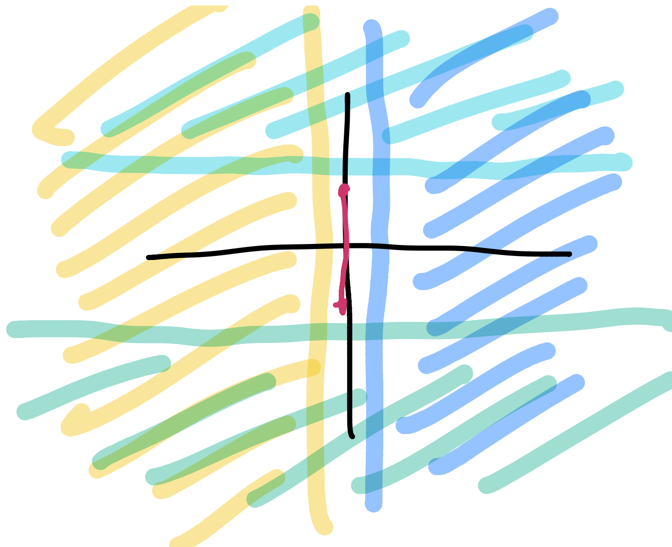
Il est clair que $f_1(z)$ est holomorphe sur U et telle que $f_1'(z) = \frac{1}{1+z^2}$

↳ on découpe U en ouverts simplement connexes, d'intersection non-vide.

5. Soit γ un lacet de $\mathbb{C} - \{-i, i\}$. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ à partir de $\mathrm{Ind}_\gamma(i)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(-i)$. En déduire que lorsque γ est un lacet de $\mathbb{C} - [-i, i]$, $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

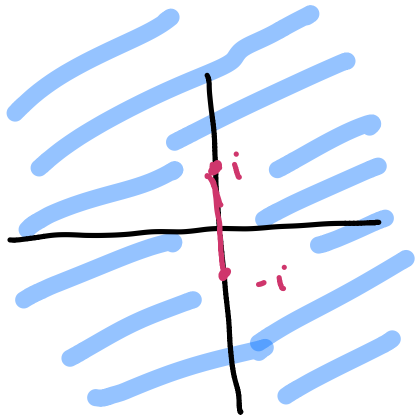
6. Montrer qu'il existe f_1 holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - [-i, i]$, telle que $f_1'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

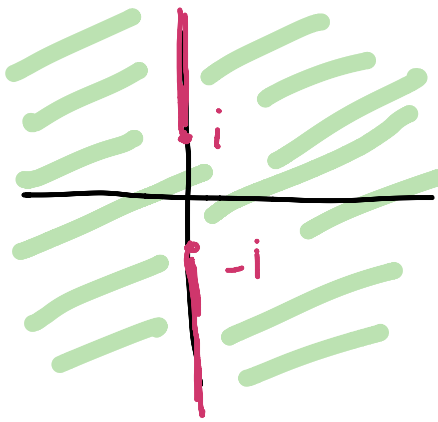
7. Peut-on choisir f_1 telle que $f = f_1$ sur $U \cap V$? Justifier.



7)

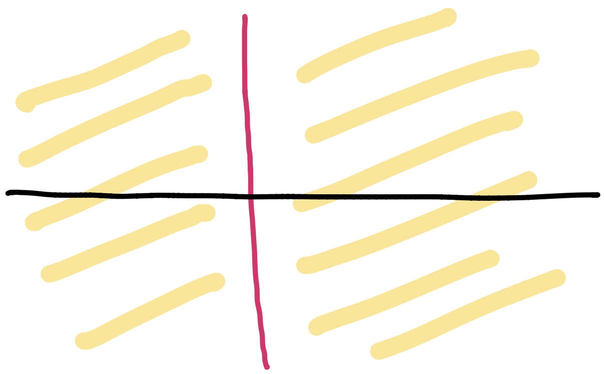
u

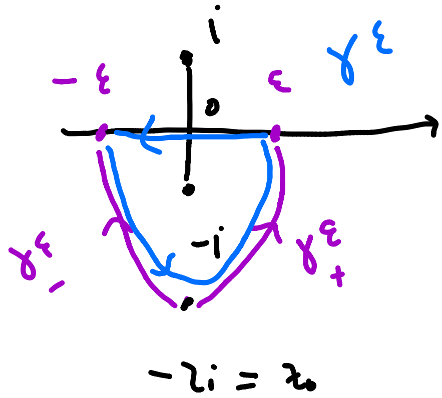




v

$u \cap v = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$





$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_1(\varepsilon) - f_1(-\varepsilon) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_+^\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2} - \int_{\gamma_-^\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_+^\varepsilon - \gamma_-^\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2}$$

Soit γ^ε le lacet en bleu, tel que

$$\gamma_+^\varepsilon - \gamma_-^\varepsilon = \gamma^\varepsilon + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_+^\varepsilon - \gamma_-^\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma^\varepsilon} \frac{dz}{1+z^2}}_{2\pi i \left(-\frac{1}{2i}\right)} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{1+t^2}}_{\text{intégrale} \to 0}$$

$$= -\pi$$

Donc $f_1(0^+) - f_1(0^-) = -\pi \Rightarrow f_1$ ne peut se prolonger par continuité en 0 à partir de sa définition sur $\mathbb{R}^* = U \cap \mathbb{R} \subset U$

D'autre part, f est continue sur $\mathbb{R} \subset V$

$\Rightarrow f_1 \neq f$.

Exercice 5. 1. Déterminer les racines de l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0$.

2. Soit γ le cercle unité orienté positivement. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{2}z + 1}$.

3. Calculer l' intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}$. (On se ramènera à la question précédente en exprimant $\cos\theta$ à partir de $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$).

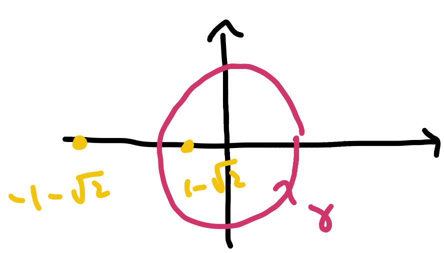
4. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{2} + \cos\theta)^2}$.

1) $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 1 = (z + \sqrt{2})^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z + \sqrt{2} = \pm 1$

$\Leftrightarrow z = \pm 1 - \sqrt{2}$

2)



On pose $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2\sqrt{2}z+1}$. Par le thm des résidus,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{rés}(f, 1-\sqrt{2})$$

$$\text{rés}(f, 1-\sqrt{2}) = \lim_{z \to 1-\sqrt{2}} \cancel{(z-1+\sqrt{2})} \frac{1}{\cancel{(z-1+\sqrt{2})}(z+1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \pi i$

Exercice 5. 1. Déterminer les racines de l'équation $z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0$.

2. Soit γ le cercle unité orienté positivement. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2\sqrt{2}z+1}$.

3. Calculer l' intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}$. (On se ramènera à la question précédente en exprimant $\cos\theta$ à partir de $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$).

4. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}$.

$z = e^{i\theta}$ $\quad dz = ie^{i\theta}d\theta \Leftrightarrow \dfrac{dz}{iz} = d\theta$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}$

$$\boxed{\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]}$$

$$= \int_\gamma \frac{dz}{iz} \frac{2}{2\sqrt{2} + z + z^{-1}} = \frac{2}{i} \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 1}}_{\pi i}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta} = 2\pi$$

4) À faire pour mercredi !