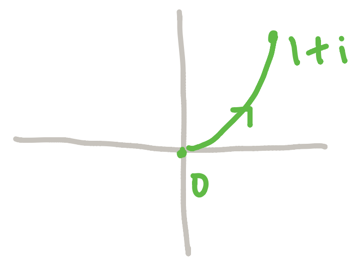
Exercice 4. 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, F et G deux fonctions holomorphes dans Ω et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_\gamma \underbrace{F(z)G'(z)}\, dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma \underbrace{\overset{\downarrow}{F'}(z)G(z)}\, dz$$

2. Calculer $\int_\gamma (z+2)e^{iz}\, dz$, où γ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i\dfrac{t^2}{\pi^2}$ paramétré par t décrivant $[0,\pi]$ (On réfléchira afin de simplifier le calcul à faire).



$F'(z) = 1$

$G(z) = \frac{1}{i}e^{iz} = -ie^{iz}$

$$\int_\gamma \underset{F(z)}{\underset{\|}{(z+2)}}\,\underset{G'(z)}{\underset{\|}{e^{iz}}}\, dz = F(\pi+i)\,G(\pi+i) - F(0)\,G(0) - \frac{1}{i}\int_\gamma \underbrace{e^{iz}\, dz}$$

$G'(z) = i\,G(z)$

$\underbrace{\left[-ie^{iz}\right]_0^{\pi+i}}$

$$= (\pi+i+2)\left(-ie^{i(\pi+i)}\right) - 2(-i) - \left(-ie^{i(\pi+i)} + i\right)$$

$$= (\pi+i+2)\left(\frac{i}{e}\right) + 2i - \frac{i}{e} - i$$

$$e^{i(\pi+i)} = e^{i\pi-1} = e^{i\pi}e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$= i + \frac{i}{e}(\pi+i+2-1) = i + \frac{i\pi}{e} - \frac{1}{e} + \frac{i}{e}$$

$$= -\frac{1}{e} + i\left(1 + \frac{\pi-1}{e}\right)$$

$e^{i(\frac{\pi}{2}+i)} = e^{i\pi/2 - 1} = e^{i\pi/2} e^{-1} = \frac{i}{e}$

Exercice 5. En évaluant $\int_C e^z \, dz$ sur le cercle unité, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) \, d\theta = 0$$

e^z est entière (= holomorphe sur $\mathbb{C}$)

Le chemin C est fermé $\Rightarrow \int_C e^z dz = 0$

$\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$W = \int_\gamma e^z dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} \, i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} \, i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \, e^{i(\theta + \sin\theta)} \, i \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} [\cos(\theta + \sin\theta) + i \sin(\theta + \sin\theta)] i \, d\theta$$

$$= \underbrace{-\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) \, d\theta}_{} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) \, d\theta}_{}$$

$\mathrm{Re}(w)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}(w)$

On sait que $w = 0 \iff \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w) = 0$

ce qui montre le résultat. $\square$

Exercice 6. Calculer

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z},$$

où $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) et $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt$.

Indice: se servir de la formule du binôme de Newton

$$\int_\gamma \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}} (z^2+1)^n dz$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k} \, dz$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\int_\gamma z^{2k-n-1} \, dz}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } 2k-n-1 \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } 2k-n-1 = -1 \iff n = 2k \end{cases}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \binom{n}{n/2} 2\pi i & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \binom{n}{n/2} 2\pi i & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\|$$

$$\int_0^{2\pi} \left(e^{it}+e^{-it}\right)^n \frac{i\cancel{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}}\, dt$$

$$\|$$

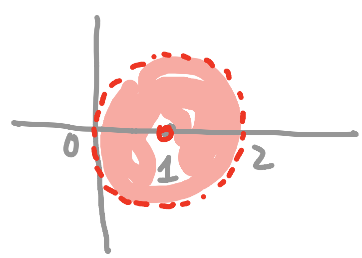
$$\int_0^{2\pi} 2^n \cos^n t \; i \, dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

□

Exercice 7. Soit

$$\forall z \in D(1,1) \setminus \{1\}, f(z) = \frac{1}{z^2 - z}.$$



1. Montrer que f est holomorphe sur $D(1,1) \setminus \{1\}$. $=: \tilde{D}$

2.a. Soit $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = 1 + \frac{e^{it}}{2}$. Montrer que :

$$\operatorname{Im}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = 2\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{(2+\cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt.$$

b. En déduire que

$$\int_\gamma f(z)dz \neq 0.$$

3. Conclure que f n'a pas de primitive sur $D(1,1) \setminus \{1\}$.

$\boxed{1}$ $\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z(z-1)}$ $\rightarrow$ $1/z$ holomorphe sur $\tilde{D}$ (car $0 \notin \tilde{D}$)

$\rightarrow \dfrac{1}{z-1}$ holomorphe sur $\tilde{D}$ (car $1 \notin \tilde{D}$)

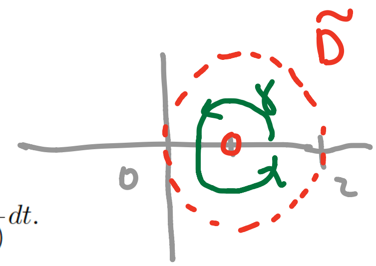
En se servant du fait que le produit de fcts hol. est holomorphe, on obtient que f est hol. sur $\tilde{D}$.

Autre argument : $z^2 - z$ est holomorphe $\Rightarrow \dfrac{1}{z^2-z}$ est holomorphe partout sauf lorsque $z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z = 0, 1$

On conclut en observant que $0, 1 \notin \tilde{D}$.

Exercice 7. Soit

$$\forall z \in D(1,1) \setminus \{1\}, f(z) = \frac{1}{z^2 - z}.$$



1. Montrer que f est holomorphe sur $D(1,1) \setminus \{1\}$.

2.a. Soit $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = 1 + \frac{e^{it}}{2}$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) = 2\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{(2+\cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt.$$

b. En déduire que

$$\int_\gamma f(z)dz \neq 0.$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

3. Conclure que f n'a pas de primitive sur $D(1,1) \setminus \{1\}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{e^{it}}}{\cancel{2}\left(1+e^{it}/2\right)\left(\cancel{e^{it}/2}\right)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2i}{2+e^{it}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2i}{(2+\cos t + i \sin t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2i\,(2+\cos t - i\sin t)}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$= \underbrace{\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{2\sin t}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt}}_{\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)} + i\,\underbrace{\boxed{2\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos t}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt}}_{\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)}$$

Maintenant, $\forall\, t \in [0, 2\pi]$, $2+\cos t > 0 \Rightarrow$

2b)

$$\frac{2+\cos t}{(2+\cos t)^2+\sin^2(t)} > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) > 0.$$

3) Si f avait une primitive holomorphe sur $\tilde{D}$, alors, comme $\gamma \subset \tilde{D}$ est un chemin fermé, on aurait $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. #

Proposition 5.4. *L'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques :*

$$f,\ g\colon\quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

satisfait les six propriétés suivantes.

(i) Linéarité positive : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (a\,f + b\,g) \;=\; a\int_{\mathbb{R}^d} f + b\int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$, alors :*

$$\int_{F\cup G} f \;=\; \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ en presque tout point, alors :*

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) *Si g est intégrable et si $0 \leqslant f \leqslant g$, alors f est aussi intégrable.*

(v) *Si f est intégrable, alors $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

(vi) *Si $\int f = 0$, alors $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

$f(x) \neq 0 \ \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \int f \neq 0$

https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~merker/Enseignement/Integration/lebesgue-integrale.pdf

Exercice 8. 1. (a) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt.$$

(b) Montrer que si $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout z de module $\geq R$, f est un polynôme.

2. On suppose que le rayon de convergence de la série donnant f est égal à 1 et que $|f(z)|(1-|z|) \leq 1$ pour tout z de module strictement inférieur à 1. Montrer que pour tout n, $|a_n| \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)$.

1c. Calculus

$$f(re^{it})e^{-int} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{i(k-n)t}$$

Cette série converge normalement sur $[0,2\pi]$,
(se servir du lemme d'Abel)

donc uniformément et

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{i(k-n)t}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n \end{cases}}$$

Si $k \neq n$

$$\left[\frac{e^{i(k-n)t}}{i(k-n)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

car $e^{2\pi i m} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

$$= a_n r^n\, 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt = \frac{1}{i} \int_\gamma z^{k-n}\, dz \quad \text{où } \gamma(t) = e^{it},\ t \in [0,2\pi]$$

(c'est le même calcul que d'habitude !!)

Exercice 8. 1. (a) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt.$$

A, B constantes réelles positives

(b) Montrer que si $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout z de module $\geq R$, f est un polynôme.

Par le a)

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} A + B\underbrace{|re^{it}|^k}_{= r^k}\, dt$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n}(A + Br^k) \quad \forall r \geq R$$

Si $n > k$,

$$\Leftrightarrow |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$\left(|a_n| \xrightarrow{r \to \infty} 0 \right)$$

Exercice 8. 1. (a) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geq 0$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt.}$$

(b) Montrer que si $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout z de module $\geq R$, f est un polynôme.

2. On suppose que le rayon de convergence de la série donnant f est égal à 1 et que $|f(z)|(1-|z|) \leq 1$ pour tout z de module strictement inférieur à 1. Montrer que pour tout n, $|a_n| \leq (1+\frac{1}{n})^n (n+1)$.

Par le a), $\forall\, 0<r<1$, on a

Donc,

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-|re^{it}|}\, dt \qquad = |r|\,|e^{it}|$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-r}\, dt$$

$$= \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

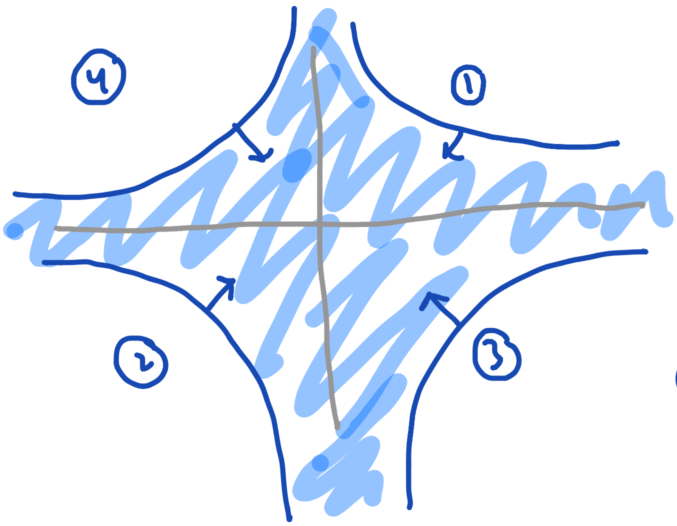
En particulier, pour $r = \frac{n}{n+1}$, on obtient

$$|a_n| \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)$$

$\square$

Feuille 4 : Calcul d'intégrales, Fonctions méromorphes

Exercice 1. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; |xy| < 1\}$. Montrer que Ω est simplement connexe.



$|y| < \frac{1}{|x|}$

① $x, y > 0$ $\quad y < \frac{1}{x}$

③ $x > 0 \quad y < 0$

$-y < \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \quad y > -\frac{1}{x}$

② $x, y < 0$ $\quad -y < -\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow y > \frac{1}{x}$

④ $x < 0, \ y > 0$

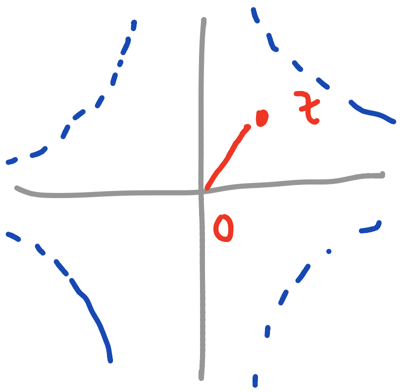
$y < -\frac{1}{x}$

Soit $z \in \Omega$. On prétend que $tz \in \Omega$ $\forall t \in [0,1]$

$\forall t \in [0,1], \ t^2 \leq 1$

$\Rightarrow \quad |tx\, ty| = t^2 |xy| \leq |xy| < 1$

Ainsi, Ω est étoilé p/r à 0 et donc simplement connexe. $\square$



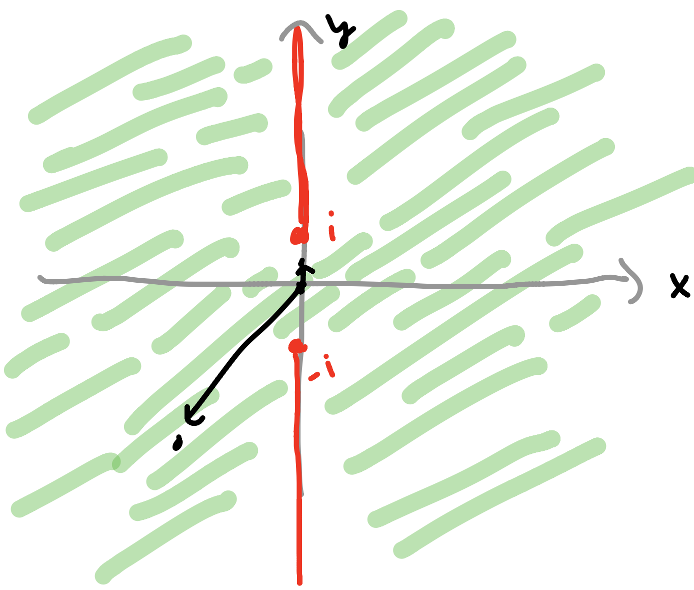
$z \in \Omega \Rightarrow tz \in \Omega \quad \forall t \in [0,1]$

Exercice 2. Soit V l'ouvert de $\mathbb{C}$ donné par $V = \{z \in \mathbb{C} ; z \neq it$ pour tout t avec $|t| \geq 1\}$.

1. Montrer que V est simplement connexe.

2. Soit f l'unique primitive de $\dfrac{1}{1+z^2}$ sur V, vérifiant $f(0) = 0$. Que vaut $f(x)$ lorsque x est réel ? Écrire un développement limité de f au voisinage de 0.

3. Montrer que si $\operatorname{Re} z > 0$, $f(z) + f(1/z) = \pi/2$.



Soit $z = x+iy \in V$. On montre que $tz \in V$ $\forall t \in [0,1]$.

(si $t=0$, $z=0$ ✓)

- $t(x+iy)$, $x \neq 0 \Rightarrow \forall t \in]0,1]$, $tx \neq 0$

$\Rightarrow z \neq iw$, $|w| \geq 1$. (i.e. $z \in V$).

- Si $x=0$, $y<1 \Rightarrow \forall t \in [0,1]$

$t(x+iy) = tiy < 1$

Ainsi, V est étoilé p/r à 0, donc simplement connexe.