Exercice 3. 1. (a) Soient P, Q deux fonctions holomorphes au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, vérifiant $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$. On pose $f(z) = P(z)/Q(z)$. Montrer que $\text{Rés}\,(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

(b) Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions :

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad \frac{e^z}{z-1}, \quad \frac{ze^z}{z^2-1}, \quad \frac{1}{\sin \pi z}.$$

2. Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions

$$\frac{e^z}{z(z-1)^2}, \quad \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2}, \quad \frac{e^z}{(z-1)^k}, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

$$\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

pôles simple pour $z = k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

si $k \neq 0$, $\dfrac{\cot(\pi z)}{z^2}$ a un pôle simple en $z = k$

(car $z^2 = k^2 \neq 0$)

$$\lim_{z \to k} \frac{(z-k)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)\, z^2}$$

$$\sin(\pi(z-k) + \pi k) = (-1)^k \sin(\pi(z-k))$$

$$= \lim_{z \to k} \frac{(z-k)}{\left(\pi(z-k) - \frac{\pi^3 (z-k)^3}{6} + \dots\right)} \frac{\cos(\pi z)}{(-1)^k z^2}$$

$$= \lim_{z \to k} \frac{\cancel{(z-k)}}{\pi \cancel{(z-k)} \left(1 - \cancel{\frac{\pi^2 (z-k)^2}{6}} + \dots\right) z^2} \frac{\cos(\pi z)}{(-1)^k}$$

0, $(-1)^k$, $z^2 \to k^2$

$$= \frac{1}{\pi k^2}$$

Si $k=0$

$\dfrac{\cot(\pi z)}{z^2}$ a un pôle triple en $z=k$.

$$\| \text{ (près de 0)}$$

$$\frac{1}{z^2}\left(\frac{1-\frac{\pi^2 z^2}{2}+\frac{\pi^4 z^4}{24}+\mathcal{O}(z^6)}{\pi z-\frac{\pi^3 z^3}{6}+\mathcal{O}(z^5)}\right)$$

$$\|$$

$$\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{\pi z}-\frac{\pi z}{3}-\frac{\pi z^3}{45}-\mathcal{O}(z^5)\right)$$

$$1-\frac{\pi^2 z^2}{2}+\dots \quad \Big| \quad \pi z-\frac{\pi^3 z^3}{6}$$

$$1-\frac{\pi^2 z^2}{6}+\dots \qquad \frac{1}{\pi z}-\frac{\pi z}{3}+\dots$$

$$-\frac{\pi^2 z^2}{3}$$

$$\frac{1}{\pi z^3}-\frac{\pi}{3z}-\frac{\pi z}{45}-\mathcal{O}(z^3)$$

si $k=0$, $\text{rés}(f,0) = -\pi/3$

En somme, si $f(z)=\dfrac{\cot(\pi z)}{z^2}$, on a

$$\text{rés}(f,k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi k^2} & \text{si } k\neq 0 \quad \text{pôles simples} \\[2ex] -\dfrac{\pi}{3} & \text{si } k=0 \quad \text{pôle d'ordre 3} \end{cases}$$

Exercice 3. 1. (a) Soient P, Q deux fonctions holomorphes au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, vérifiant $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$. On pose $f(z) = P(z)/Q(z)$. Montrer que $\text{Rés}\,(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

(b) Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions :

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad \frac{e^z}{z-1}, \quad \frac{ze^z}{z^2-1}, \quad \frac{1}{\sin \pi z}.$$

2. Déterminer les pôles et les résidus en ces pôles des fonctions

$$\frac{e^z}{z(z-1)^2}, \quad \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2}, \quad \frac{e^z}{\underbrace{(z-1)^k}}, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

pôle d'ordre k en $z = 1$

$$e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

vois. de 1

$$\Updownarrow$$

$$e^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

vois. de 0

$$a_n = \frac{d^n}{dz^n}(e^z)\Big|_{z=1}$$

$$f(z) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-k}}{n!}$$

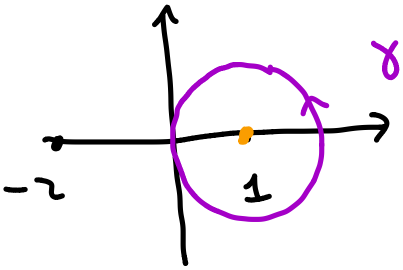
$$n - k = -1 \Leftrightarrow n = k-1$$

$$\Rightarrow \text{rés}(f, 1) = \frac{e}{(k-1)!}$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 1 de rayon 1, orienté positivement.
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre -2 de rayon 2, orienté positivement.
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 0 de rayon 3/2, orienté positivement.
4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^k}$, où γ est le cercle de centre 0 de rayon 5, orienté positivement, et où $k \in \mathbb{N}^*$.

On se sert du thm des résidus !!



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \ \text{rés}(f,1) \ \underbrace{\text{Ind}_\gamma(1)}_{1}$$

$$\text{rés}(f,1) = \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \frac{1}{\cancel{(z-1)}(z+2)} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2\pi i}{3}$$

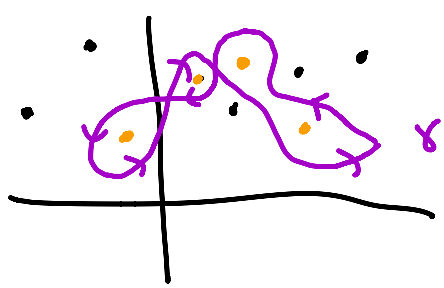
THM des résidus

Soit f une fct méromorphe sur U, F son ensemble (fini) de points singuliers, γ un lacet dans $U \setminus F$.

Alors, on a
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in F} \text{rés}(f, z_0) \ \text{Ind}_\gamma(z_0)$$

Note: il suffit de considérer les $z_0 \in F$ qui sont contenus dans γ ("entourés" par γ) ; en effet pour les autres, on a $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 0$.

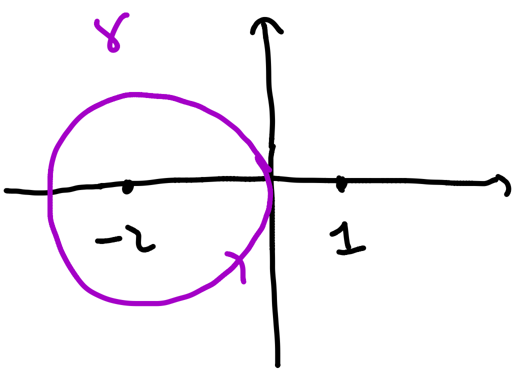
$$\int_\gamma f(z)\,dz$$



Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 1 de rayon 1, orienté positivement.
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre -2 de rayon 2, orienté positivement.
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+2)}$ où γ est le cercle de centre 0 de rayon $3/2$, orienté positivement.
4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^k}$, où γ est le cercle de centre 0 de rayon 5, orienté positivement, et où $k \in \mathbb{N}^*$.

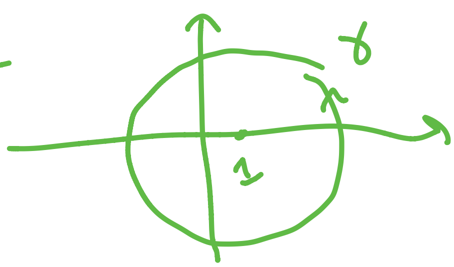
m̄ résultat



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\ \underbrace{\text{rés}(f,-2)}_{-1/3}\ \underbrace{\text{Ind}_\gamma(-2)}_{1}$$

$$\text{rés}(f,-2) = \lim_{z\to -2} \cancel{(z+2)}\,\frac{1}{(z-1)\cancel{(z+2)}} = -\frac{1}{3}$$

<u>4</u>

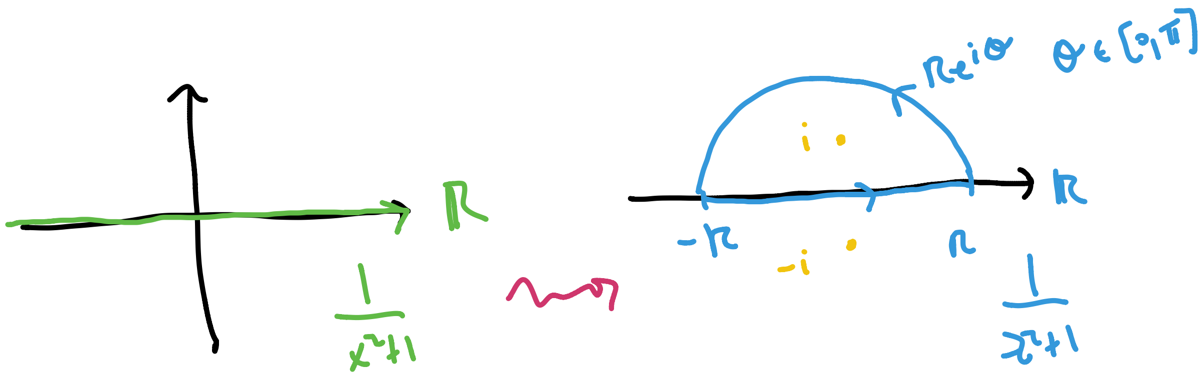


$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\ \text{rés}(f,1)\ \text{Ind}_\gamma(1)$$
$$= 2\pi i\ \text{rés}(f,1)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{e}{(k-1)!}\right)$$

par la question précédente. □

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+1}$



$$\underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1}}_{\text{calcul "facile" avec le thm des résidus}} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^2+1}\,dz}_{\text{intégrale réelle recherchée}} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\frown} \frac{dz}{z^2+1}}_{\text{on montre que } \xrightarrow[R\to\infty]{} 0}$$

a) $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ ↙ 2 pôles simples, en i et $-i$

$$\underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\underbrace{\text{rés}(f,i)}\,\underbrace{\text{Ind}_{\gamma_R}(i)}_{1}}_{\text{pour } R>1}$$

$$\text{rés}(f,i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{1}{2i}$$

$$\Bigg\} \ \pi$$

$$\lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^2+1} R i e^{i\theta}\, d\theta}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)} = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^2+1}\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\frown} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\,dx + 0$$

On a retrouvé le résultat connu sans utiliser arctan(x); on va se servir de ce schéma de calcul pour faire des intégrales plus difficiles.

$$|a-b| \geq ||a|-|b||$$

$$|(Re^{i\theta})^2-(-1)| \geq |\underbrace{|Re^{i\theta}|^2}_{R^2}-1|$$

$$R>1$$

$$\left| \int_A \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\, d\theta \leq \frac{\pi}{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \to +\infty} \int_A \frac{dz}{z^2+1} = 0$$

Pour ce genre d'intégrales, on se sert souvent des 2 lemmes suivants :

1 LEMME D'ESTIMATION

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \max_{z \in \mathrm{Im}\,\gamma} |f(z)|$$

Démonstration [modifier | modifier le code]

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma(t)$, un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :

$$|I| = \left| \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \mathrm{d}t \right|$$

ce que l'on peut majorer comme suit :

$$|I| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t$$

En majorant le module de *f* sur le chemin et par définition de la longueur d'un arc, on a :

$$|I| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t \text{ et } \mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t$$

d'où finalement :

$$|I| \leq \mathrm{L}(\gamma) \max_{z\in \mathrm{Im}\,\gamma} |f(z)|$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_d%27estimation

$\boxed{2}$ LEMME DE JORDAN

Soit f holomorphe sur U. Si $|zf(z)| \xrightarrow{|z|\to+\infty} 0$, alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{D(0,R)\cap U} f(z)\,dz = 0$$

Démonstration [masquer]

On a

$$\oint_{C(0,r)\cap D} f(z)dz = \oint_{C(0,r)\cap D} zf(z)\frac{dz}{z}.$$

D'après l'hypothèse sur f, $|zf(z)|$ tend vers 0 à mesure que le rayon du cercle tend vers l'infini. Donc, en posant $z = re^{i\theta}$

$$\left|\oint_{C(0,r)\cap D} zf(z)\frac{dz}{z}\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |zf(z)|\frac{rd\theta}{r} = 2\pi \max_{z\in C(0,r)} |zf(z)| \to 0.$$

$C(0,r) \leftrightarrow D(0,R)$

$D \leftrightarrow U$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Jordan

Avec ces 2 lemmes, on démontre les résultats suivants :

1) "Fractions rationnelles"

Soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle, sans pôle réel

Supposons que

i) $\exists\ M, R > 0,\ \alpha > 1$ tels que $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^\alpha}$

$\forall\ z,\ |z| \geqslant R$.

ou

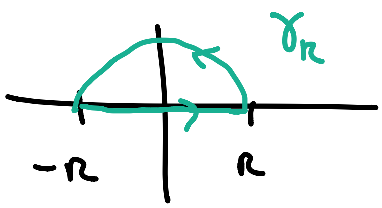
ii) $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$

ou

iii) $\lim\limits_{|t| \to +\infty} t f(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R})$

Alors, $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx} = 2\pi i \sum\limits_{z_0,\ \mathrm{Im}(z_0)>0} \text{rés}(f, z_0)$

<u>démo</u>: comme on vient de faire + lemmes de Jordan ou d'estimation



grâce aux hypothèses

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \cancel{\lim_{R\to+\infty} \int_{\frown} f(z)\,dz} \to 0$$

par le thm des résidus

$$2\pi i \sum_{z_0,\ \mathrm{Im}(z_0)>0} \text{rés}(f, z_0) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

□

2) "Mélanges"

Soit f méromorphe, sans pôles réels.

Si i) $\exists M, R > 0$ tels que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}$ $\forall z, |z| \geq R$

ou

ii) $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$

Alors,

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\alpha x} dx} = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z_0, \mathrm{Im}(z_0) > 0} \mathrm{r\acute{e}s}\left(f(z)e^{i\alpha z}, z_0\right) & \text{si } \alpha > 0 \\ -2\pi i \sum_{z_0, \mathrm{Im}(z_0) < 0} \mathrm{r\acute{e}s}\left(f(z)e^{i\alpha z}, z_0\right) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

démo : Même idée que pour le théorème précédent.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_r%C3%A9sidus

$\square$

Un troisième type d'intégrales qui est fréquent :

3) Fonctions trigonométriques

Si $R(\cos t, \sin t)$ est une fraction rationnelle de $\cos t$ et $\sin t$ sans pôle sur le cercle unité, alors

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt \xleftarrow{z=e^{it}} \int_{\partial D(0,1)} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{z_0 \text{ pôle de} \\ D(0,1)}} \operatorname{res}(g(z), z_0)$$

où $g(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$.

exemple: [Fcts trigo]

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} \quad \text{où } a > 1.$$

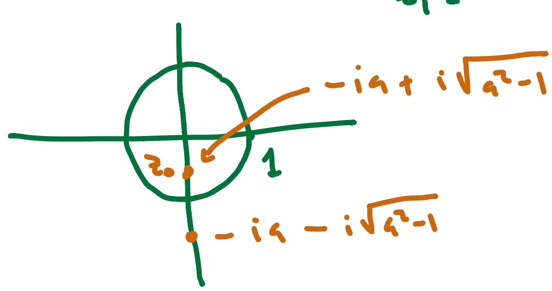
$\Downarrow$

dénom $\neq 0$ donc intégrale bien définie.

$$g(z) = \frac{1}{iz}\,\frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{aiz + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}$$

pôles de $g(z) = ?$

$$z_0 = -ai + i\sqrt{a^2-1} \qquad a>1$$
$$z_1 = -ai - i\sqrt{a^2-1}$$



$$\left(\begin{array}{c} -a + \sqrt{a^2-1} < 1 \\ \sqrt{a^2-1} < 1 + a \\ 0 < a\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}_{<1} < a < a+1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \ \text{rés}(g, z_0)$$

$$\text{rés}(g, z_0) = \lim_{z \to z_0} \cancel{(z-z_0)} \frac{2}{\cancel{(z-z_0)}(z-z_1)}$$

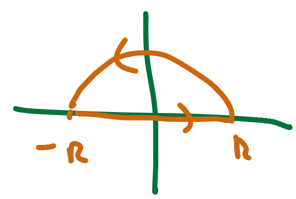
$$= \frac{2}{z_0 - z_1}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} i \sqrt{a^2-1}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$\square$

autre exemple : [fractions rationnelles] $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}$

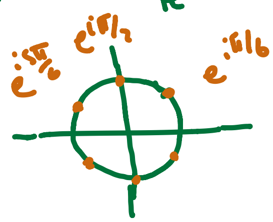
D'abord, $I = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^6}$



Ici $\deg(Q) = 6 \geq 2 = \deg(P) + 2$, donc

$$I = 2\pi i \sum_{z_0,\ \text{Im}(z_0) > 0} \text{rés}(f, z_0) \quad \text{où } f(z) = \frac{1}{1+z^6}$$

f a 6 pôles simples $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)}$, $k = 0, \dots, 5$.



$$\mathrm{rés}(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} \cancel{(z - z_k)} \frac{1}{\cancel{(z - z_k)} \prod_{i \neq k} (z - z_i)} = \frac{1}{\prod_{i \neq k} (z_k - z_i)}$$

$k = 0, 1, 2$

$$= \frac{1}{6 z_k^5}$$

car $z_k^6 = -1$

$$= \frac{-z_k}{6}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{-2\pi i}{6} \left(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{i5\pi/6} \right)$$

$$= \frac{-2\pi}{6} \left(2\sin(\pi/6) + 1 \right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\to I = \pi/3 .$$