UNIVERSITÉ PARIS 13

MÉMOIRE DE M2 - MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

La diagonale de l'associaèdre

par :
Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI

coencadré par :
Bruno VALLETTE, professeur au LAGA, université Paris 13
Eric HOFFBECK, maître de conférences au LAGA, université Paris 13

2 juillet 2019

Il faudrait que le système éducatif soit un endroit où l'on transforme complètement la signification du mot «échec». L'échec scolaire, ce n'est pas l'échec de l'enfant, c'est l'échec du système à tous les coups. Comment ose-t-on faire de la compétition quand il s'agit de se construire ? Et cette compétition, on en fait même une course de vitesse. Or la vitesse n'a rien à voir avec l'éducation, avec la construction de soi. On ne peut aller que lentement pour se construire, pour comprendre. Celui qui ne comprend pas comprend qu'il n'a pas compris. Donc, il progresse dans la compréhension. Celui qui croit avoir compris «bluffe» ; en réalité il va vite et on lui donne une bonne note. Ce n'est pas sérieux.

Albert Jacquard
Construire une civilisation terrienne

Je ne sais pas si j'avais suffisamment de talent pour la musique au départ. Être compositeur ne veut pas forcément dire que l'on s'occupe uniquement de musique. Comme en économie, en politique et en sport, il y a aussi dans les arts et les sciences des gens qui se concentrent sur un seul sujet ; or, tendre de manière monomaniaque vers un but précis donne en règle générale d'excellents résultats. Chez un autre type de personnalités créatrices, l'attention se répartit sur un vaste éventail d'intérêts. Je fais partie sans aucun doute de ce second type et je serais très malheureux si je devais me borner à une spécialité. Mon enthousiasme m'a toujours porté vers de nombreux domaines différents de la connaissance.

György Ligeti

Avec le suprématisme, Kasimir Malevitch propose une abstraction radicale, profondément spirituelle, qui cherche à révéler l'essence du monde au-delà des apparences contingentes.

Centre George-Pompidou

Préambule

Un petit mot d'abord sur les trois citations mises en exergue de ce mémoire : celle d'un biologiste sur l'éducation, celle d'un compositeur sur la musique et celle d'un conservateur de musée sur la peinture de Malevitch. Que font-elles ici, dans un mémoire de mathématiques ?

La citation de Jacquard, découverte dans la retranscription d'une de ses conférences intitulée «Construire une civilisation terrienne», me suit depuis plusieurs années. Elle me semble toujours aussi brûlante d'actualité. Elle illustre aussi à mon sens la posture du mathématicien, qui cherche sans relâche car il *sait* qu'il n'a pas compris.

La citation de Ligeti, découverte il y a deux ans à la lecture de sa biographie chez Fayard, a été une révélation. Ce mémoire est le fruit du travail d'un mathématicien en devenir, mais également d'un musicien et d'un compositeur dont la connaissance spécifique ne prend sens qu'accompagnée d'une curiosité sans cesse renouvelée pour l'ensemble des autres domaines des sciences et des arts. Il faut résister à cette tendance actuelle à la «surspécialisation» qui est partout dans notre société.

Enfin, la citation qui porte sur le travail de Malevitch, glanée au Centre Pompidou il y a quelques semaines, m'a semblé résumer de manière terriblement concise le but des mathématiques.

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier François Lalonde pour ses encouragements et son soutien indéfectible. C'est grâce à toi si je suis venu à Paris cette année.

J'aimerais remercier la Fondation Sciences Mathématiques de Paris de même que le Consulat général de France à Québec, sans qui cette année d'étude et a fortiori la rédaction de ce mémoire n'auraient pas été possibles.

Merci à Bruno Vallette, pour avoir vu «l'opératchik» en moi et pour m'avoir pris sous ton aile. C'est une chance immense de poursuivre en thèse avec toi. Merci à Eric Hoffbeck pour ces heures passées à lire et annoter mon travail et à m'expliquer les choses depuis le début.

Merci aux gens extraordinaires qui m'ont accueilli à Paris et qui continuent à partager ma route : Valérie ; Agnès, Rufo, Edda et Théodora ; Nicolas et les étudiants de l'ESIEE ; Mâkhi, Pierre et tous les xénakiens ; mes collègues Vadim, Hugo, Archia, Thomas et Richard.

Merci à mes parents, mon frère et ma soeur pour leur amour constant et leur soutien. Merci à Anne-Julie, pour ton amour sans faille et ta présence bienveillante. Merci d'avoir traversé trois fois l'Atlantique pour venir me voir.

Enfin, merci à Bach, Stockhausen, Franck et Ligeti dont les compositions ont rendu l'année qui vient de passer franchement agréable.

À A.-J.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Supposons que vous voulez vous rendre de Montréal à Rimouski en précisément 8 heures, en vous arrêtant 2 heures à Québec pour visiter vos grands-parents. Ces derniers vous ont dit qu'ils devaient faire des courses mais vous ne savez pas à quelle heure exactement. Vous envisagez alors deux options : rouler très vite et atteindre Québec au plus tôt afin de rencontrer vos grands-parents avant leurs courses, puis rouler plus lentement jusqu'à Rimouski ; ou bien rouler lentement jusqu'à Québec en espérant arriver après les courses, puis rouler très vite jusqu'à Rimouski.

Aurez-vous fait le même voyage ? Non, bien évidemment. Cependant, un topologue algébriste aurait tout de même envie de dire que vous aurez fait le «même» voyage : même trajet, mêmes points de départ, d'arrivée et d'arrêt, même temps total de parcours... Seule la *vitesse* change.

Plaçons-nous dans un espace topologique X et considérons l'ensemble des chemins qui partent et arrivent en un point donné x_0, c'est-à-dire l'espace ΩX des applications continues $f : [0,1] \to X$ telles que $f(0) = f(1) = x_0$. La concaténation de ces lacets constitue une opération dans cet espace, mais elle n'est pas associative. La raison pour laquelle les concaténations $(ab)c$ et $a(bc)$ ne sont pas les mêmes est précisément le fait qu'elles ne sont pas parcourues à la même *vitesse*. Par contre, il est possible passer de manière continue du chemin $(ab)c$ au chemin $a(bc)$, c'est-à-dire qu'il existe une homotopie entre les deux. De plus, deux telles homotopies entre deux chemins donnés sont elles-mêmes homotopes. Et ainsi de suite pour les homotopies supérieures, jusqu'à l'infini.

∼

La question des espaces de lacets itérés a occupé de manière très sérieuse les topologues algébristes dans les années 1970 et a mené à l'introduction de la notion d'opérade par J.P. May. Généralisant la notion d'algèbre associative, cette dernière permet d'encoder différentes structures algébriques, notamment celle d'algèbre associative à homotopie près.

Ce mémoire constitue le fer de lance d'une étude approfondie de la notion d'opérade à homotopie près. Introduite il y a bientôt vingt ans par Van der Laan [VdL02], elle permet de décrire dans un cadre rigoureux et très général des structures algébriques apparues très récemment dans les études des mathématiciens et des physiciens. Elle généralise la notion d'algèbre associative à homotopie près.

Notre point de départ est l'article très récent de Naruki Matsuda, Hugh Thomas, Andy Tonks et Bruno Vallette [MTTV19]. Les auteurs y introduisent une méthode nouvelle, inspirée de la théorie des polytopes fibrés, qui leur permet de résoudre un problème vieux de plus de 70 ans : l'approximation de la diagonale de l'associaèdre.

Alors que les algèbres associatives à homotopie près sont décrites par une certaine famille de polytopes nommés associaèdres, on sait depuis très récemment par les travaux de Jovana Obradovic [Obr19] que les opérades à homotopie près sont décrites par une autre famille de polytopes appelés graphes-associaèdres. Serait-il possible de généraliser les méthodes de Vallette et coauteurs pour définir une approximation de la diagonale des graphes-associaèdres ?

Le diagramme (1.1) illustre le schéma de pensée suivi dans ce travail. Nous introduisons au chapitre 2 les notions d'algèbre associative, d'algèbre libre et d'algèbre différentielle graduée, ce qui nous permet de définir la notion d'algèbre associative à homotopie près. Dans le chapitre 3, nous effectuons un parcours parallèle dans le monde des opérades jusqu'à définir la notion d'opérade à homotopie près. Enfin, nous abordons plus en détail dans le chapitre 4 l'article [MTTV19] et montrons comment il permet de déterminer de manière *géométrique* le produit tensoriel de deux algèbres associatives à homotopie près.

$$\begin{tikzcd}
\text{Algèbres associatives} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \text{Opérades} \arrow[d] \\
\text{Algèbres assoc. à homotopie près} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dotted, leftrightarrow] & \text{Opérades à homotopie près} \arrow[d, dotted, leftrightarrow] \\
\text{Associaèdre} & \text{Graphe-associaèdre}
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

1.2 Notations et conventions

La grande majorité du matériel présenté dans ce mémoire provient du livre de Jean-Louis Loday et Bruno Vallette [LV12] dont on adoptera les notations. Dans la suite on fixe un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et on travaillera minimalement dans la catégorie Vect des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Chapitre 2

Algèbres et cogèbres

2.1 Algèbres associatives, algèbre libre

Définition 2.1.1. Une *algèbre associative non-unitaire* est un espace vectoriel A muni d'une application linéaire $\mu : A \otimes A \to A$ appelée «produit» telle que

$$\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu). \tag{2.1}$$

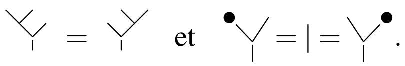
S'il existe de plus une application linéaire $u : \mathbb{K} \to A$ appelée «unité» telle que

$$\mu \circ (u \otimes \mathrm{id}_A) = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes u) = \mathrm{id}_A, \tag{2.2}$$

on la dit *algèbre associative unitaire* et on note $1_A := u(1_{\mathbb{K}})$, élément qu'on appelle également «unité». On peut représenter les relations (2.1) et (2.2) par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}_A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes u"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{K} \otimes A \arrow[l, "u \otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

ou encore par les arbres :



REMARQUE 2.1.2. Une algèbre associative unitaire peut être vue comme un monoïde dans la catégorie monoïdale symétrique (voir annexe A) des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$; c'est ce que suggèrent les diagrammes (2.3). L'action du bifoncteur $- \otimes -$ sur les morphismes est donnée par $(f,g) \mapsto f \otimes g$ où $(f \otimes g)(a \otimes b) := f(a) \otimes g(b)$.

REMARQUE 2.1.3. La donnée d'applications linéaires μ et u est équivalente à la donnée d'une application bilinéaire $\phi : A \times A \to A$ et d'un élément neutre $1_A \in A$. En effet, à partir de ϕ, on obtient par propriété universelle du produit tensoriel une unique application linéaire μ ; dans l'autre sens, on compose à la source μ avec l'application bilinéaire $\varphi : A \times A \to A \otimes A$ définie par $\varphi(a,b) = a \otimes b$. De plus, u est entièrement déterminée par l'image de $1_{\mathbb{K}}$. En notant $ab := \phi(a,b) = \mu(a \otimes b)$, on obtient la définition équivalente suivante : une algèbre associative unitaire est un espace vectoriel A tel que $a(bc) = (ab)c$ pour tout $a,b,c \in A$ et tel qu'il existe un élément $1_A \in A$ tel que $a1_A = 1_A a = a$ pour tout $a \in A$.

EXEMPLES. Le corps de base $\mathbb{K}$ est lui-même une algèbre associative unitaire pour le produit $\mu(k \otimes \ell) := k\ell$ et $u := \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$. Les endormophismes d'un espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$ forment eux même un espace vectoriel pour l'addition point par point $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$ et la multiplication par un scalaire $(kf)(v) := kf(v)$. Munis de la composition des applications linéaires $\mu(f \otimes g) := f \circ g$ et de l'application identité $1_{\mathrm{End}(V)} := \mathrm{id}_V$, ils forment une algèbre associative unitaire. La cohomologie singulière d'un espace topologique muni du produit cup forme une algèbre associative unitaire.

Définition 2.1.4. Un *morphisme* entre deux algèbres associatives non-unitaires (A, μ_A) et (B, μ_B) est une application linéaire $f : A \to B$ telle que

$$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f). \tag{2.4}$$

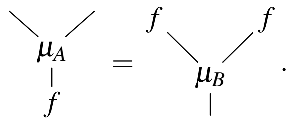
Dans le cas unitaire on demande également que

$$f \circ u_A = u_B, \tag{2.5}$$

ou encore de manière équivalente que $f(1_A) = 1_B$. Les relations (2.4) et (2.5) peuvent être représentées par des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{K} \arrow[dl, "u_A"'] \arrow[dr, "u_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

et la première par un arbre



Les algèbres associatives non-unitaires (resp. unitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée *As*-alg (resp. *uAs*-alg).

Une algèbre associative unitaire est dite *augmentée* s'il existe un morphisme d'algèbres $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$. Dans ce cas elle est isomorphe en tant qu'algèbre à $\mathbb{K}1 \oplus \ker\varepsilon$. On note $\overline{A} := \ker\varepsilon$ et on le dit «idéal d'augmentation». La catégorie des algèbres associatives unitaires augmentées est équivalente à la catégorie des algèbres associatives non-unitaires ; on travaillera donc le plus souvent avec la première catégorie dans la suite.

Définition 2.1.5. L'*algèbre tensorielle* sur un espace vectoriel V est obtenue en munissant le module tensoriel

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

du produit de concaténation $\mu : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ défini sur $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{\otimes p+q}$ par

$$v_1 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdots v_{p+q} \mapsto v_1 \cdots v_p v_{p+1} \cdots v_{p+q}$$

et étendu de manière unique par linéarité. Par convention, $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}1$. Le signe $\otimes$ est omis pour le produit tensoriel «interne» à $T(V)$ afin de le distinguer du produit tensoriel «externe» entre deux copies de $T(V)$. Il s'agit d'une algèbre associative (car $\otimes$ l'est) et unitaire en choisissant $1 \in V^{\otimes 0}$ comme unité. L'algèbre tensorielle *réduite* sur V est obtenue par le même procédé à partir de

$$\overline{T}(V) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}.$$

Elle est toujours associative mais n'est plus unitaire. L'algèbre tensorielle est munie de l'*injection* $i : V \to T(V)$ qui est l'inclusion de V dans $T(V)$.

REMARQUE 2.1.6. L'algèbre tensorielle est augmentée par le morphisme $\varepsilon : T(V) \to \mathbb{K}$ défini par $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(v_1 \cdots v_n) = 0$ pour $n \geqslant 1$. Son idéal d'augmentation est $\overline{T}(V)$.

REMARQUE 2.1.7. Pour définir une application linéaire dont la source est $T(V)$, il suffit de la définir sur chacune des composantes de poids n : toute application linéaire $f : T(V) \to A$ peut s'écrire comme somme directe $f = \bigoplus_n f^{(n)}$ d'applications linéaires $f^{(n)} : V^{\otimes n} \to A$. De manière analogue, il suffit pour définir une application linéaire sur $T(V) \otimes T(V)$ de le faire sur chacune des composantes de poids n, qui sont les $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ avec $p + q = n$. Dans ce cas nous noterons $i^{(p)} \otimes i^{(q)} : V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \hookrightarrow T(V) \otimes T(V)$ les inclusions canoniques.

Définition 2.1.8. Une *algèbre associative libre* sur un espace vectoriel V est une algèbre associative $\mathscr{L}(V)$ munie d'une application linéaire $i : V \to \mathscr{L}(V)$ possédant la propriété universelle suivante : pour toute algèbre associative A et toute application linéaire $f : V \to A$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{f} : \mathscr{L}(V) \to A$ telle que $f = \tilde{f} \circ i$.

On peut représenter cette propriété par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{L}(V) \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd} .$$

Remarque 2.1.9. Il s'agit d'une propriété universelle d'*extension à la source* («extension du morphisme f à l'algèbre associative libre $\mathscr{L}(V)$»). De manière équivalente, $\mathscr{L}(-)$ est un foncteur associant à un espace vectoriel son algèbre associative libre. Selon que ce foncteur ait pour but uAs-alg ou As-alg, on notera $\mathscr{L}(-)$ et $\overline{\mathscr{L}}(-)$ et on obtiendra l'algèbre associative libre unitaire ou non-unitaire. Ce foncteur est en fait adjoint à gauche du foncteur oubli associant à chaque algèbre associative son espace vectoriel sous-jacent. Autrement dit, pour tout espace vectoriel V, une bijection naturelle lie les morphismes d'algèbre en provenance de $\mathscr{L}(V)$ et les applications linéaires en provenance V :

$$uAs - \mathrm{alg}(\mathscr{L}(V), A) \cong \mathrm{Vect}(V, A)$$
$$As - \mathrm{alg}(\overline{\mathscr{L}}(V), A) \cong \mathrm{Vect}(V, A)$$

La propriété universelle de $\mathscr{L}(V)$ garantit que cette algèbre est unique à isomorphisme canonique près ; nous sommes donc en droit de parler de «l'»algèbre associative libre.

Proposition 2.1.10. *L'algèbre tensorielle (resp. l'algèbre tensorielle réduite) munie de l'injection est libre dans la catégorie des algèbres associatives unitaires (resp. non-unitaires).*

Démonstration. Soit (A, μ_A) une algèbre associative unitaire, $f : V \to A$ une application linéaire.

Unicité. Supposons qu'il existe $\tilde{f} : T(V) \to A$ un morphisme d'algèbres tel que $\tilde{f} \circ i = f$. Alors il vérifie immédiatement pour tout $v_1 \in V$

$$\begin{array}{rcll} \tilde{f}^{(0)}(1) & = & 1_A & \text{par unitarité,} \\ \tilde{f}^{(1)}(v_1) & = & f(v_1) & \text{par compatibilité avec } f. \end{array} \tag{2.6}$$

De plus, il doit faire commuter, pour tout n et tout couple p, q tel que $p + q = n$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \arrow[r, "i^{(p)} \otimes i^{(q)}"] \arrow[d] & T(V) \otimes T(V) \arrow[r, "\tilde{f} \otimes \tilde{f}"] \arrow[d, "\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\ V^{\otimes n} \arrow[r, "i^{(n)}"] & T(V) \arrow[r, "\tilde{f}"] & A \end{tikzcd}$$

Nous montrons par induction sur $n = p + q$ que cette condition détermine $\tilde{f}$ de manière unique. Il suffit de considérer les cas où $pq \neq 0$, les autres étant déterminés par (2.6). Examinons d'abord le cas $n = 2$ où $p = q = 1$. Pour $v_1 \otimes v_2 \in V \otimes V$, il faut que

$$\tilde{f}^{(2)}(v_1 v_2) = \tilde{f} \circ \mu \circ (i^{(1)} \otimes i^{(1)})(v_1 \otimes v_2) = \mu_A \circ (\tilde{f}^{(1)} \otimes \tilde{f}^{(1)})(v_1 \otimes v_2) = \tilde{f}^{(1)}(v_1) \tilde{f}^{(1)}(v_2) = f(v_1) f(v_2)$$

Supposons maintenant, en nous servant de l'associativité du produit de A, que pour tout $k \leqslant n-1$, $p + q = k$ et $pq \neq 0$,

$$\tilde{f}^{(k)}(v_1 \cdots v_k) = f(v_1) \cdots f(v_k)$$

Alors, pour $p = n-1$ et $q = 1$, $v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n \in V^{\otimes n-1} \otimes V^{\otimes 1}$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &= \tilde{f} \circ \mu \circ (i^{(n-1)} \otimes i^{(1)})(v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n) \\
&= \mu_A \circ (\tilde{f}^{(n-1)} \otimes \tilde{f}^{(1)})(v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n) \\
&= \tilde{f}^{(n-1)}(v_1 \cdots v_{n-1}) \tilde{f}^{(1)}(v_n) \\
&= f(v_1) \cdots f(v_n)
\end{aligned}$$

Ainsi, le morphisme $\tilde{f} = \bigoplus \tilde{f}^{(n)}$ est unique : il est entièrement déterminé par f et la condition d'être un morphisme d'algèbres associatives unitaires.

Existence. Maintenant, si pour $x \in T(V)$, $k \in \mathbb{K}$ et $v_1 \cdots v_n \in V^{\otimes n}$ on définit un certain $\tilde{f}$ par les formules

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(1) &:= 1_A \\
\tilde{f}^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &:= f(v_1) \cdots f(v_n)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

on obtient une application linéaire $\tilde{f}$ qui est également un morphisme d'algèbres. En effet, pour tout couple p, q tel que $p + q = n$ et $pq \neq 0$ nous avons d'une part

$$\tilde{f} \circ \mu \circ (i^{(p)} \otimes i^{(q)})(v_1 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdots v_{p+q}) = \tilde{f}^{(n)}(v_1 \cdots v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n)$$

et d'autre part

$$\mu_A \circ (\tilde{f}^{(p)} \otimes \tilde{f}^{(q)})(v_1 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdots v_{p+q}) = \tilde{f}^{(p)}(v_1 \cdots v_p) \tilde{f}^{(q)}(v_{p+1} \cdots v_{p+q}) = f(v_1) \cdots f(v_n)$$

par associativité de μ_A. De plus, nous avons par définition $\tilde{f} \circ i = f$, ce qui termine la démonstration.

Il suffit de remplacer $T(V)$ par $\overline{T}(V)$ et de retirer (2.6) et (2.7) pour obtenir la démonstration dans le cas non-unitaire. □

Dorénavant on notera $\mathscr{L}(V)$ par $T(V)$ -resp. $\overline{\mathscr{L}}(V)$ par $\overline{T}(V)$.

2.2 Cogèbres coassociatives, cogèbre colibre

Définition 2.2.1. Une *cogèbre coassociative non-counitaire* est un espace vectoriel C muni d'une application linéaire $\Delta : C \to C \otimes C$ appelée «coproduit» telle que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = (\mathrm{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta. \tag{2.8}$$

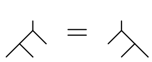
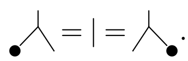
S'il existe de plus une application linéaire $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ tel que

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = (\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_C, \tag{2.9}$$

on la dit *cogèbre coassociative counitaire*. On peut représenter les relations (2.8) et (2.9) par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_C"] & \\
C \otimes \mathbb{K} & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C"] & \mathbb{K} \otimes C
\end{tikzcd} \tag{2.10}$$

Une autre manière d'interpréter ces relations consiste à les voir comme des arbres :

 et 

REMARQUE 2.2.2. Une cogèbre coassociative counitaire peut être vue comme un monoïde dans la catégorie *opposée* à la catégorie monoïdale symétrique des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (voir annexe A) ; on a en effet purement et simplement inversé le sens des flèches des diagrammes (2.3) pour obtenir ceux de (2.10).

REMARQUE 2.2.3. Le coproduit Δ peut manifestement être itéré. On pose $\Delta^0 := \mathrm{id}_C$, $\Delta^1 := \Delta$ et $\Delta^n := (\Delta\otimes \mathrm{id}\otimes\cdots\otimes \mathrm{id})\circ\Delta^{n-1}$ pour $n\geqslant 2$. Par coassociativité, «on peut placer le delta où on veut» : $\Delta^n(x) = (\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes \Delta\otimes\cdots\otimes\mathrm{id})\circ\Delta^{n-1}$ pour tout $n\geqslant 2$. Pour $x\in C$, $\Delta^n(x)$ vit dans $C^{\otimes n+1}$, de sorte qu'il peut s'écrire comme une somme finie $\sum_{i\in I} x_1^i\otimes\cdots\otimes x_{n+1}^i$ avec chacun des x_k^i dans la $k$ième copie de C dans $C^{\otimes n+1}$. Utiliser la *notation de Sweedler* consiste à rendre implicite l'ensemble d'indices I et à écrire $\Delta^n(x) := \sum x_1\otimes\cdots\otimes x_{n+1}$. C'est la convention que nous adopterons dans la suite.

EXEMPLES. Le corps de base $\mathbb{K}$ est lui-même une cogèbre coassociative counitaire pour le coproduit défini par $\Delta(1) := 1\otimes 1$ et la counité $\varepsilon := \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$. L'homologie singulière à coefficients dans un corps d'un espace topologique X est une cogèbre coassociative : la diagonale $\Delta : X\to X\times X$ induit un coproduit $\Delta : H_\bullet(X)\to H_\bullet(X\times X)\cong H_\bullet(X)\otimes H_\bullet(X)$ grâce au théorème de Künneth.

REMARQUE 2.2.4. **Dualité linéaire entre algèbres et cogèbres.** Notons $V^* := \mathrm{Vect}(V,\mathbb{K})$ le dual linéaire de l'espace vectoriel V. L'application linéaire canonique

$$\begin{array}{rcl} \omega : V^*\otimes V^* & \to & (V\otimes V)^* \\ f\otimes g & \mapsto & [x\otimes y\mapsto f(x)g(y)] \end{array}$$

est un isomorphisme si et seulement si V est de dimension finie. En dualisant linéairement, un coproduit $\Delta : C\to C\otimes C$ donne naissance à $\Delta^* : (C\otimes C)^*\to C^*$ et le produit $\mu : A\otimes A\to A$ à $\mu^* : A\to (A\otimes A)^*$. En conséquence, les liens entre algèbre et cogèbre sont les suivants : si (C,Δ) est une cogèbre, alors $(C^*,\Delta^*\circ\omega)$ est une algèbre ; et si (A,μ) est une algèbre *de dimension finie*, alors $(A^*,\omega^{-1}\circ\mu^*)$ est une cogèbre. Autrement dit une hypothèse de finitude est nécessaire pour passer d'algèbre à cogèbre.

Définition 2.2.5. Un *morphisme* entre deux cogèbres coassociatives non-counitaires (C,Δ_C) et (D,Δ_D) est une application linéaire $F : C\to D$ telle que

$$(f\otimes f)\circ\Delta_C = \Delta_D\circ f. \tag{2.11}$$

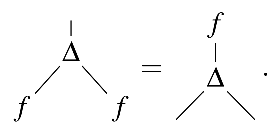
Dans le cas counitaire on demande également que

$$\varepsilon_D\circ f = \varepsilon_C. \tag{2.12}$$

Les relations (2.11) et (2.12) peuvent être représentées par des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

et la première par un arbre



Les cogèbres coassociatives non-counitaires (resp. counitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée *As*-cog (resp. *uAs*-cog).

Une cogèbre coassociative est dite *coaugmentée* s'il existe un morphisme de cogèbres $u : \mathbb{K}\to C$. Dans ce cas u détermine une counité $1\in C$, et C est isomorphe en tant que cogèbre à $\mathbb{K}1\oplus\mathrm{coker}(\varepsilon)$. On note $\overline{C} := \mathrm{coker}(\varepsilon)$ et on le dit «idéal de coaugmentation». La catégorie des cogèbres coassociatives counitaires coaugmentées est équivalente à la catégorie des cogèbres coassociatives non-counitaires ; on travaillera donc le plus souvent avec le première catégorie dans la suite.

À une cogèbre coassociative coaugmentée C on peut associer un coproduit *réduit* $\overline{\Delta} : \overline{C}\to\overline{C}\otimes\overline{C}$ défini par la formule $\overline{\Delta}(x) := \Delta(x) - x\otimes 1 - 1\otimes x$. Le coproduit réduit itéré est noté $\overline{\Delta}^n : \overline{C}\to\overline{C}^{\otimes n+1}$. Avec son aide, on définit la *filtration coradicale* de C par les formules

$$\begin{array}{rcl} F_0C & := & \mathbb{K}1, \\ F_rC & := & \mathbb{K}1\oplus\{x\in\overline{C}\ \mid\ \overline{\Delta}^n(x) = 0\ \forall n\geqslant r\} \end{array}$$

pour $r\geqslant 1$. Cette filtration est dite *exhaustive* si $C = \cup_r F_rC$.

Définition 2.2.6. Une cogèbre coassociative C est dite *conilpotente* si elle est coaugmentée et si sa filtration coradicale est exhaustive.

REMARQUE 2.2.7. Dans ce cas tout élément $x \in \overline{C}$ est *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{\Delta}^m(x) = 0$ pour tout $m \geqslant n$.

Définition 2.2.8. La *cogèbre tensorielle* sur un espace vectoriel V est obtenue en munissant le module tensoriel

$$T^c(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

du coproduit de *dé*concaténation $\Delta : T^c(V) \to T^c(V) \otimes T^c(V)$ défini sur $V^{\otimes 0}$ par $1 \mapsto 1 \otimes 1$ et sur $V^{\otimes n}$ par

$$v_1 \cdots v_n \mapsto \sum_{i=0}^{n} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_n$$

étendu de manière unique par linéarité. Par convention, $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}1$. Le signe $\otimes$ est omis pour le produit tensoriel «interne» à $T^c(V)$ afin de le distinguer du produit tensoriel «externe» entre deux copies de $T^c(V)$. Il s'agit d'une cogèbre coassociative et counitaire en choisissant $\varepsilon : T^c(V) \to \mathbb{K}$ valant l'identité sur $V^{\otimes 0}$ et 0 sinon. La cogèbre tensorielle *réduite* sur V est obtenue par le même procédé à partir de

$$\overline{T^c}(V) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}$$

mais en définissant le coproduit sur $V^{\otimes n}$ par

$$v_1 \cdots v_n \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_n.$$

Elle est toujours coassociative mais n'est plus counitaire. La cogèbre tensorielle est munie de la *projection* $p : T^c(V) \to V$ définie par l'identité sur V et 0 sinon.

REMARQUE 2.2.9. La cogèbre tensorielle est coaugmentée par l'inclusion $i : \mathbb{K} \to T^c(V)$. Son idéal de coaugmentation est $\overline{T^c}(V)$. La dualité entre algèbre tensorielle et cogèbre tensorielle est ici évidente : le morphisme-unité de $T(V)$ est la coaugmentation de $T^c(V)$ et l'augmentation de $T(V)$ est le morphisme-counité de $T^c(V)$. La filtration coradicale est donnée par $F_rT^c(V) = \bigoplus_{n \leqslant r} V^{\otimes n}$, elle est exhaustive elle fait de $T^c(V)$ une cogèbre coassociative conilpotente.

REMARQUE 2.2.10. Pour définir une application linéaire dont le but est $T^c(V)$, il suffit de la définir sur chacune des composantes de poids n : toute application linéaire $\varphi : C \to T^c(V)$ peut s'écrire comme somme directe $\varphi = \bigoplus_n \varphi^{(n)}$ d'applications linéaires $\varphi^{(n)} : C \to V^{\otimes n}$. De manière analogue, il suffit pour définir une application linéaire vers $T^c(V) \otimes T^c(V)$ de le faire pour chacune des composantes de poids n, qui sont les $V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s}$ avec $r + s = n$. Dans ce cas nous noterons $p^{(r)} \otimes p^{(s)} : T^c(V) \otimes T^c(V) \twoheadrightarrow V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s}$ les projections canoniques.

Définition 2.2.11. Une *cogèbre coassociative colibre* sur un espace vectoriel V est une cogèbre coassociative conilpotente $\mathscr{L}^c(V)$ munie d'une application linéaire $p : \mathscr{L}^c(V) \to V$ telle que $p(1) = 0$ et possédant la propriété universelle suivante : pour toute cogèbre coassociative conilpotente C et toute application linéaire $\varphi : C \to V$ telle que $\varphi(1) = 0$, il existe un unique morphisme de cogèbres $\tilde{\varphi} : C \to \mathscr{L}^c(V)$ tel que $\varphi = p \circ \tilde{\varphi}$.

On peut représenter cette propriété par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathscr{L}^c(V) \arrow[r, "p"'] & V
\end{tikzcd}$$

REMARQUE 2.2.12. Travailler dans la catégorie des cogèbres conilpotentes est crucial et relève d'une asymétrie fondamentale entre les algèbres et les cogèbres. L'objet colibre dans la catégorie des cogèbres coassociatives non-nécessairement conilpotentes est très différent de celui-ci.

REMARQUE 2.2.13. Il s'agit d'une propriété universelle d'*extension au but* («extension du morphisme φ à la cogèbre coassociative colibre $\mathscr{L}^c(V)$»). De manière équivalente, le foncteur $\mathscr{L}^c(-)$ associant à un espace vectoriel sa cogèbre coassociative colibre. Selon que ce foncteur ait pour but *uAs*-cog-conil ou *As*-cog-conil, on notera $\mathscr{L}^c(-)$ et $\overline{\mathscr{L}^c}(-)$ et on obtiendra la cogèbre coassociative colibre counitaire ou non-counitaire. Ce foncteur est en fait adjoint à droite du foncteur oubli associant à chaque cogèbre coassociative C l'espace vectoriel sous-jacent à $\overline{C}$. Autrement dit, pour tout espace vectoriel V, une bijection naturelle lie les morphismes de cogèbre vers $\mathscr{L}^c(V)$ et les applications linéaires vers V :

$$\begin{aligned} uAs-\text{cog-conil}(C,\mathscr{L}^c(V)) &\cong \text{Vect}(\overline{C},V) \\ As-\text{cog-conil}(C,\overline{\mathscr{L}^c}(V)) &\cong \text{Vect}(\overline{C},V) \end{aligned}$$

La propriété universelle de $\mathscr{L}^c(V)$ garantit que cette cogèbre est unique à isomorphisme canonique près ; nous sommes donc en droit de parler de «la» cogèbre coassociative colibre.

Proposition 2.2.14. *La cogèbre tensorielle (resp. la cogèbre tensorielle réduite) munie de la projection est colibre dans la catégorie des cogèbres coassociatives counitaires conilpotentes (resp. non-counitaires).*

Démonstration. Soit $\varphi : C \to V$ une application linéaire telle que $\varphi(1_C) = 0$.

Unicité. Supposons qu'il existe un morphisme de cogèbres $\tilde{\varphi} : C \to T^c(V)$ tel que $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$. Alors il vérifie immédiatement pour tout $x_1 \in \overline{C}$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(0)}(x_1) &= 0 && \text{par counitarité} && (2.13) \\ \tilde{\varphi}^{(0)}(1_C) &= 1 && \text{par coaugmentation} && (2.14) \\ \tilde{\varphi}^{(1)}(x_1) &= \varphi(x_1) && \text{par compatibilité avec } \varphi \end{aligned}$$

De plus, il doit faire commuter pour tout n et tout couple r,s tel que $r+s=n$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\Delta_C"] & T^c(V) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\Delta"] & V^{\otimes n} \arrow[d] \\ C \otimes C \arrow[r, "\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\varphi}"] & T^c(V) \otimes T^c(V) \arrow[r, "p_r \otimes p_s"] & V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s} \end{tikzcd}$$

Nous montrons par induction sur $n = r+s$ que cette condition détermine $\tilde{\varphi}$ de manière unique. Il suffit de considérer les cas où $rs \neq 0$, les autres étant déterminés par (2.13) et (2.14). Examinons d'abord le cas $n=2$ où $r=s=1$. Pour $x \in \overline{C}$, il faut que

$$\tilde{\varphi}^{(2)}(x) = (p^{(1)} \otimes p^{(1)}) \circ \Delta \circ \tilde{\varphi}(x) = (\tilde{\varphi}^{(1)} \otimes \tilde{\varphi}^{(1)}) \circ \Delta_C(x) = \sum \tilde{\varphi}^{(1)}(x_{(1)}) \otimes \tilde{\varphi}^{(1)}(x_{(2)}) = \sum \varphi(x_{(1)})\varphi(x_{(2)})$$

Supposons maintenant, en nous servant de la coassociativité du coproduit de C, que pour tout $k \leqslant n-1$, $r+s=k$ et $rs \neq 0$,

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(x) = \sum \varphi(x_{(1)}) \cdots \varphi(x_{(k)})$$

Alors, pour $r = n-1$ et $s=1$, $x \in \overline{C}$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(n)}(x) &= (p^{(n-1)} \otimes p^{(1)}) \circ \Delta \circ \tilde{\varphi}(x) \\ &= (\tilde{\varphi}^{(n-1)} \otimes \tilde{\varphi}^{(1)}) \circ \Delta_C(x) \\ &= \sum \tilde{\varphi}^{(n-1)}(x_{(1)}) \otimes \tilde{\varphi}^{(1)}(x_{(2)}) \\ &= \sum \varphi(x_{(1)}) \cdots \varphi(x_{(n)}) \end{aligned}$$

Ainsi, le morphisme $\tilde{\varphi} = \bigoplus \varphi^{(n)}$ est unique : il est entièrement déterminé par φ et la condition d'être un morphisme de cogèbres coassociatives counitaires.

Existence. Maintenant, si pour $x \in \overline{C}$, $k \in \mathbb{K}$ on définit un certain $\tilde{\varphi}$ par les formules

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(0)}(x_1) &:= 0 && (2.15)\\ \tilde{\varphi}(1_C) &:= 1 && (2.16)\\ \tilde{\varphi}^{(n)}(x) &:= \sum \varphi(x_{(1)}) \cdots \varphi(x_{(n)}) \end{aligned}$$

on obtient une application linéaire $\tilde{\varphi}$ qui a bien pour but $T^c(V)$: C étant supposée conilpotente, seul un nombre fini des $\tilde{\varphi}^{(n)}(x) = (\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi) \circ \overline{\Delta}_C^{n-1}(x)$ sont non-nuls et $\tilde{\varphi}(x)$ est bien dans $T^c(V)$. Cette application est également un morphisme de cogèbres coassociatives counitaires : pour tout couple r, s tel que $r+s=n$ et $rs \neq 0$ nous avons d'une part

$$(p^{(r)} \otimes p^{(s)}) \circ \Delta \circ \tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}^{(n)}(x) = \sum \varphi(x_{(1)}) \cdots \varphi(x_{(n)})$$

et d'autre part

$$(\tilde{\varphi}^{(r)} \otimes \tilde{\varphi}^{(s)}) \circ \Delta_C(x) = \sum \tilde{\varphi}^{(r)}(x_{(1)}) \otimes \tilde{\varphi}^{(s)}(x_{(2)}) = \sum \varphi(x_{(1)}) \cdots \varphi(x_{(n)})$$

par coassociativité de Δ_C et l'isomorphisme $V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s} \cong V^{\otimes n}$. De plus, nous avons par définition $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, ce qui achève la démonstration.

Il suffit de remplacer $T^c(V)$ par $\overline{T^c}(V)$ et de retirer (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16) pour obtenir la démonstration dans le cas non-counitaire. □

Dorénavant nous noterons $\mathscr{L}^c(V)$ par $T^c(V)$ -resp. $\overline{\mathscr{L}^c}(V)$ par $\overline{T^c}(V)$.

2.3 Algèbre graduée, cogèbre graduée

Définition 2.3.1. Un *espace vectoriel gradué* V est constitué d'une famille d'espaces vectoriels $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ indicée par les entiers. Un vecteur $v \in V_n$ est dit de *degré homologique* (ou simplement *degré*) n, ce dernier étant noté $|v|$. Un *morphisme* entre deux espaces vectoriels gradués $f : V \to W$ est composé d'une famille d'applications linéaires $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : V_n \to W_{n+r}$ indicées par les nombres entiers. Le nombre entier r est dit *degré* de f, ce dernier étant noté $|f|$. Les espaces vectoriels gradués et leurs morphismes forment une catégorie notée gVect.

Ainsi, pour $v \in V_n$ et $f : V \to W$, on obtient $|f(v)| = |f| + |v|$. De plus, degré est additif pour la composition : $|f \circ g| = |f| + |g|$. Les familles d'espaces vectoriels V et W peuvent être assemblées en sommes directes $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ et $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$; leurs vecteurs sont alors les éléments presque tous nuls et les morphismes $f : V \to W$ des sommes directes d'applications linéaires $\bigoplus f_n : \bigoplus V_n \to \bigoplus W_{n+r}$.

EXEMPLES. Tout espace vectoriel V peut être vu comme un espace vectoriel gradué concentré en degré 0 ; c'est le cas en particulier de $\mathbb{K}$. En conséquence, Vect $\hookrightarrow$ gVect est une inclusion de catégories. Les polynômes en n variables $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ forment un espace vectoriel gradué par leur degré. Les groupes d'homologie $H_\bullet(X, \mathbb{K})$ à coefficient dans un corps d'un espace topologique X forment également un espace vectoriel gradué.

Définition 2.3.2. Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels gradués V et W est défini par

$$(V \otimes W)_n := \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j \tag{2.17}$$

La catégorie gVect munie du produit tensoriel forme une catégorie monoïdale symétrique. L'isomorphisme de symétrie est donné par l'application

$$\begin{aligned} \tau : V \otimes W &\to W \otimes V && (2.18)\\ v \otimes w &\mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v \end{aligned}$$

Deux morphismes $f : V \to V'$ et $g : W \to W'$ dans gVect donnent naissance à un morphisme $V \otimes W \to V' \otimes W'$ dans cette même catégorie, caractérisé lui aussi par un signe du fait de la structure monoïdale symétrique

$$\begin{aligned} V \otimes W &\to V' \otimes W'\\ v \otimes w &\mapsto (-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w) \end{aligned}$$

Nous adopterons dans la suite la *convention de Koszul*, du nom du mathématicien français Jean-Louis Koszul (1921-2018), qui consiste à noter ce morphisme $f \otimes g$ en prenant les signes pour «acquis». Autrement dit, adopter cette convention revient à poser

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := (-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w)$$

Remarquons que le degré est également additif pour le produit tensoriel des morphismes : $|f \otimes g| = |f| + |g|$.

REMARQUE 2.3.3. La structure monoïdale sur la catégorie gVect définie ici n'est pas la seule structure monoïdale qui existe ; nous renvoyons à ce sujet le lecteur à l'annexe A.

REMARQUE 2.3.4. (**Degré et poids**) Considérons $V^{\otimes n}$ où chacune des copies de V est graduée. Par définition, les éléments de degré k forment l'espace

$$(V^{\otimes n})_k := \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=k} V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_n}$$

Tout élément $\underline{v} := v_1 \cdots v_n \in V^{\otimes n}$ est alors caractérisé à la fois par un *degré*, que l'on définit comme la somme des degrés de ses composantes

$$|\underline{v}| := |v_1| + \cdots + |v_n|$$

et un *poids* que l'on définit comme le nombre de composantes

$$\mathrm{poids}(\underline{v}) := n$$

Définition 2.3.5. Soit V un espace vectoriel gradué et $\mathbb{K}s$ l'espace vectoriel gradué engendré par un élément s de degré $|s| = 1$. On définit la *suspension* de V par la formule

$$sV := \mathbb{K}s \otimes V$$

En particulier, $(sV)_n = V_{n-1}$. En s'imaginant tous les V_n disposés sur une échelle verticale on peut voir la suspension comme une translation vers le haut : on «suspend» chaque V_n à la marche supérieure $(sV)_{n+1}$.

Si maintenant l'on prend un élément s^{-1} de degré $|s^{-1}| = -1$ et que l'on note $s^{-1}\mathbb{K}$ l'espace vectoriel gradué qu'il engendre, on peut définir la *désuspension* de l'espace vectoriel gradué V par la formule

$$s^{-1}V := \mathbb{K}s^{-1} \otimes V$$

En particulier, $(s^{-1}V)_n = V_{n+1}$. En s'imaginant tous les V_n disposés sur une échelle verticale on peut voir la désuspension comme une translation vers le bas : on «désuspend» chaque V_{n+1} de la marche supérieure à la marche inférieure $(s^{-1}V)_n$.

Définition 2.3.6. Une *algèbre associative graduée* non-unitaire est un espace vectoriel gradué A muni d'un produit $\mu : A \otimes A \to A$ de degré $|\mu| = 0$, c'est-à-dire vérifiant

$$\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu)$$

Elle est dite unitaire s'il existe de plus un morphisme d'espaces vectoriels gradués $u : \mathbb{K} \to A$ tel que

$$\mu \circ (u \otimes \mathrm{id}_A) = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes u) = \mathrm{id}_A$$

Un *morphisme* entre deux algèbres associatives graduées non-unitaires (A, μ_A) et (B, μ_B) est un morphisme d'espace vectoriels gradués $f : A \to B$ respectant l'équation

$$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$$

Dans le cas unitaire on demande également que

$$f \circ u_A = u_B$$

Les algèbres associatives graduées non-unitaires (resp. unitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée gAlg (resp. guAlg). Munies du produit tensoriel des espaces vectoriels gradués sous-jacents et de l'application τ (2.18) elles forment des catégories monoïdales symétriques [1].

1. Le fait que les algèbres associatives puissent être organisées en catégorie est un phénomène général valable pour tout monoïde dans une catégorie monoïdale (voir l'annexe A). Le fait que le produit tensoriel de deux algèbres associatives soit également une algèbre associative s'explique aussi par un phénomène plus général abordé au début du chapitre 4.

REMARQUE 2.3.7. Le fait que le produit μ soit de degré 0 entraîne en particulier $A_p \otimes A_q$ est envoyé sur A_{p+q}. Par ailleurs, on voit que par définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels gradués, l'unité u doit nécessairement être de degré zéro. En effet, $0 = |\mathrm{id}_A| = |\mu \circ (u \otimes \mathrm{id}_A)| = |\mu| + |u| + |\mathrm{id}_A| = 0 + |u| + 0 = |u|$. De même, un morphisme d'algèbres associatives graduées est toujours de degré zéro : $|F| + |\mu_A| = |\mu_B| + |F| + |F| \implies |F| = 0$.

EXEMPLES. On peut voir tout algèbre associative comme une algèbre associative graduée concentrée en degré 0, autrement dit il existe une inclusion As-alg $\hookrightarrow$ gAlg. Toute algèbre associative graduée sur $\mathbb{N}$ est graduée sur $\mathbb{Z}$ en posant $A_n = 0$ pour tout $n < 0$. L'algèbre tensorielle $T(V)$ est une algèbre associative graduée pour le degré homologique ; sa graduation se déduit de la remarque 2.3.4 :

$$T(V)_k := \bigoplus_n (V^{\otimes n})_k$$

Le produit de concaténation est clairement de degré zéro et l'inclusion de $\mathbb{K}$ définit l'unité. La cohomologie d'un espace topologique à coefficients dans un corps forme une algèbre associative graduée $H^\bullet(X;\mathbb{K}) = \bigoplus_n H^n(X;\mathbb{K})$, le produit cup $- \smile - : H^k(X;\mathbb{K}) \times H^\ell(X;\mathbb{K}) \to H^{k+\ell}(X;\mathbb{K})$ étant de degré 0.

REMARQUE 2.3.8. En voyant V comme concentré en poids 1, l'inclusion canonique $i : V \to T(V)$ de même que la projection canonique $p : T(V) \to V$ sont toutes deux de degré zéro et *respectent le poids* : pour l'inclusion $v \in V_{|v|}$ est envoyé dans $T(V)^{(1)}_{|v|}$; pour la projection $v_1 \cdots v_n \in T(V)^{(n)}_{|v_1|+\cdots+|v_n|}$ est envoyé ssur $v_1 \in T(V)^{(1)}_{|v_1|}$ pour $n = 1$ et sur $0 \in 0_{|v_1|+\cdots+|v_n|} = V^{(n)}_{|v_1|+\cdots+|v_n|}$ pour $n \neq 1$.

Définition 2.3.9. L'*algèbre associative libre* sur un espace vectoriel gradué V est une algèbre associative graduée $\mathscr{L}(V)$ munie d'une application linéaire $i : V \to \mathscr{L}(V)$ possédant la propriété universelle suivante : pour toute algèbre associative graduée A et tout morphisme d'espaces vectoriels gradués $f : V \to A$ de degré $|f| = 0$, il existe un unique morphisme d'algèbres graduées $\tilde{f} : \mathscr{L}(V) \to A$ tel que $f = \tilde{f} \circ i$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{L}(V) \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $\mathscr{L}(-)$ est adjoint à gauche du foncteur oubli associant à chaque algèbre associative graduée son espace vectoriel gradué sous-jacent. Autrement dit, pour tout espace vectoriel gradué V, les deux morphismes suivants sont des bijections naturelles :

$$\begin{aligned}
uAs - \mathrm{gAlg}(\mathscr{L}(V), A) &\cong \mathrm{gVect}_0(V, A) \\
As - \mathrm{gAlg}(\overline{\mathscr{L}}(V), A) &\cong \mathrm{gVect}_0(V, A)
\end{aligned}$$

où $\mathrm{gVect}_0(V,A)$ désigne les morphismes de gVect de degré 0. La propriété universelle de $\mathscr{L}(V)$ garantit que cette algèbre graduée est unique à isomorphisme canonique près.

Proposition 2.3.10. *L'algèbre tensorielle (resp. l'algèbre tensorielle réduite) munie de l'injection est libre dans la catégorie des algèbres associatives graduées unitaires (resp. non-unitaires).*

Démonstration. Comme nous venons tout juste de le remarquer, $T(V)$ et $\overline{T}(V)$ sont déjà munis d'une graduation. La preuve dans le cas non-gradué s'étend ici sans difficulté. □

Définition 2.3.11. Une *cogèbre coassociative graduée* non-counitaire est un espace vectoriel gradué C muni d'un coproduit $\Delta : C \to C \otimes C$ de degré $|\Delta| = 0$, c'est-à-dire un morphisme d'espaces vectoriels gradués vérifiant

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = (\mathrm{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta$$

Elle est dite counitaire s'il existe de plus un morphisme d'espaces vectoriels gradués $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ étant vu comme un espace vectoriel gradué concentré en degré 0) tel que

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = (\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_{C \otimes C}$$

Un *morphisme* entre deux cogèbres coassociatives graduées non-counitaires (C,Δ_C) et (D,Δ_D) est un morphisme d'espace vectoriels gradués $f : C \to D$ respectant l'équation

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f$$

Dans le cas counitaire on demande également que

$$\varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$$

Les cogèbres coassociatives graduées non-counitaires (resp. counitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée gCog (resp. guCog). Munies du produit tensoriel des espaces vectoriels gradués sous-jacents et de l'application τ (2.18) elles forment des catégories monoïdales symétriques.

REMARQUE 2.3.12. Le fait que le produit Δ soit de degré 0 entraîne en particulier C_n est envoyé sur

$$\bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C_q$$

Par ailleurs, on voit que par définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels gradués, la counité ε doit nécessairement être de degré zéro. De même, un morphisme de cogèbres associatives graduées est toujours de degré zéro : $|F|+|F|+|\Delta_C| = |\Delta_D|+|F| \implies |F| = 0$.

EXEMPLES. On peut voir toute cogèbre coassociative comme une cogèbre coassociative graduée concentrée en degré 0, autrement dit il existe une inclusion As-cog $\hookrightarrow$ gCog. Toute cogèbre coassociative graduée sur $\mathbb{N}$ est graduée sur $\mathbb{Z}$ en posant $C_n = 0$ pour tout $n < 0$. La cogèbre tensorielle $T^c(V)$ est une cogèbre coassociative graduée pour le degré homologique ; sa graduation se déduit de la remarque 2.3.4 :

$$T^c(V)_k := \bigoplus_n (V^{\otimes n})_k$$

Le produit de déconcaténation est clairement de degré zéro et la projection sur $\mathbb{K}$ définit la counité. L'inclusion canonique $i : V \to T^c(V)$ de même que la projection canonique $p : T^c(V) \to V$ sont toutes deux de degré zéro. De plus, ces deux applications respectent le poids.

Définition 2.3.13. La *cogèbre coassociative colibre* sur un espace vectoriel gradué V est une cogèbre coassociative graduée conilpotente $\mathscr{L}^c(V)$ munie d'un morphisme d'espace vectoriels gradués $p : \mathscr{L}^c(V) \to V$ telle que $p(1) = 0$ et possédant la propriété universelle suivante : pour toute cogèbre coassociative graduée conilpotente C et tout morphisme d'espaces vectoriels gradués $\varphi : C \to V$ de degré $|\varphi| = 0$ tel que $\varphi(1) = 0$, il existe un unique morphisme de cogèbres graduées $\tilde{\varphi} : C \to \mathscr{L}^c(V)$ tel que $\varphi = p \circ \tilde{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathscr{L}^c(V) \arrow[r, "p"'] & V
\end{tikzcd}$$

REMARQUE 2.3.14. Le foncteur $\mathscr{L}^c(-)$ est adjoint à droite du foncteur oubli associant à chaque cogèbre coassociative graduée C l'espace vectoriel gradué sous-jacent à $\overline{C}$. Autrement dit, pour tout espace vectoriel gradué V, les deux morphismes suivants sont des bijections naturelles

$$uAs - \text{cog-conil}(C, \mathscr{L}^c(V)) \cong \text{gVect}_0(\overline{C}, V)$$
$$As - \text{cog-conil}(C, \overline{\mathscr{L}}^c(V)) \cong \text{gVect}_0(\overline{C}, V)$$

La propriété universelle de $\mathscr{L}^c(V)$ garantit que cette cogèbre graduée est unique à isomorphisme canonique près.

Proposition 2.3.15. *La cogèbre tensorielle (resp. la cogèbre tensorielle réduite) munie de la projection est colibre dans la catégorie des cogèbres coassociatives graduées counitaires conilpotentes (resp. non-counitaires).*

Démonstration. Comme nous venons tout juste de le remarquer, $T^c(V)$ et $\overline{T^c}(V)$ sont déjà munis d'une graduation. La preuve dans le cas non-gradué s'étend ici sans difficulté. $\square$

2.4 Dérivation, codérivation

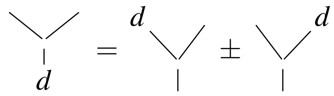
Définition 2.4.1. Soit (A,μ) une algèbre associative (resp. graduée), unitaire ou non. Une *dérivation* par rapport au produit de A est une application linéaire (resp. un morphisme d'espaces vectoriels gradués) $d : A \to A$ vérifiant

$$d \circ \mu = \mu \circ (d \otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes d) \tag{2.19}$$

On peut voir cette relation comme un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "d\otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes d"] \arrow[d, "\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \arrow[r, "d"] & A
\end{tikzcd}$$

ou encore comme un arbre



Remarque 2.4.2. Au niveau des éléments cela correspond dans le cas des algèbres associatives à $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ et dans le cas gradué à $d(ab) = d(a)b + (-1)^{|d||a|}ad(b)$ (en introduisant $\mathrm{id}_A \otimes d$ nous avons permuté $d \otimes \mathrm{id}_A$ et un signe apparaît par la définition du produit tensoriel 2.17). Pour une algèbre associative unitaire, une conséquence immédiate de la définition est la suivante : en appliquant (2.19) à $1 \otimes 1$, on obtient $d(1) = 0$.

Exemples. Prenons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles infiniment dérivables $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$; elles forment une $\mathbb{R}$-algèbre pour l'addition et la multiplication point par point (i.e. $\mu(f \otimes g) := fg$). L'application linéaire $d : f \mapsto f'$ associant à toute fonction sa dérivée est bien une dérivation au sens précédent car elle vérifie la règle de Leibniz

$$d(fg) = d(f)g + fd(g)$$

Soit A une algèbre associative non-commutative. Un calcul simple montre que le commutateur associé à un élément $a \in A$, c'est-à-dire l'application linéaire $[a,-] : A \to A$ définie par $[a,b] := ab - ba$ est une dérivation pour cette algèbre.

L'on dispose d'une caractérisation très précise des dérivations sur l'algèbre associative libre associée à un espace vectoriel (gradué ou non, le premier cas recouvrant le deuxième) :

Proposition 2.4.3. *Soit V un espace vectoriel gradué. L'ensemble des dérivations de l'algèbre associative libre $T(V)$ -resp. $\overline{T}(V)$- est en bijection avec les morphismes d'espaces vectoriels gradués $V \to T(V)$ -resp. $V \to \overline{T}(V)$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'il existe une unique dérivation étendant un morphisme d'espace vectoriel gradués $f : V \to T(V)$.

Unicité. Supposons qu'il existe une dérivation $d : T(V) \to T(V)$ étendant f, c'est-à-dire telle que $d \circ i = f$. Alors, elle doit immédiatement vérifier pour tout $v \in T(V)$

$$\begin{aligned} d(1) &= 0 \quad \text{par la remarque 2.4.2} \\ d^{(1)}(v) &= f(v) \quad \text{par compatibilité avec } f \end{aligned} \tag{2.20}$$

De plus, elle doit faire commuter pour tout n et tout couple p,q tel que $p+q=n$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, "i^{(p)}\otimes i^{(q)}"] & & \\
V^{\otimes n} \arrow[dr, "i^{(n)}"'] & T(V)\otimes T(V) \arrow[r, "d\otimes \mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes d"] \arrow[d, "\mu"] & T(V)\otimes T(V) \arrow[d, "\mu"] \\
& T(V) \arrow[r, "d"] & T(V)
\end{tikzcd}$$

Nous montrons par induction sur $n = p+q$ que cette condition détermine d de manière unique. Il suffit de considérer les cas où $pq \neq 0$, les autres étant déterminés par (2.20). Examinons d'abord le cas $n = 2$ où $p = q = 1$. Pour $v_1 \otimes v_2 \in V^{\otimes 1} \otimes V^{\otimes 1}$, il faut que

$$\begin{aligned} d^{(2)}(v_1v_2) = d \circ \mu \circ (i^{(1)} \otimes i^{(1)})(v_1 \otimes v_2) &= \mu \circ (d^{(1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(1)})(v_1 \otimes v_2) \\ &= \mu(d^{(1)}(v_1) \otimes v_2 + (-1)^{|d||v_1|} v_1 \otimes d^{(1)}(v_2)) \\ &= f(v_1)v_2 + (-1)^{|f||v_1|} v_1 f(v_2) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que pour tout $k \leqslant n-1$, $p+q = k$ et $pq \neq 0$,

$$d^{(k)}(v_1 \cdots v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_k$$

Alors, pour $p = n-1$ et $q = 1$, $v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n \in V^{\otimes n-1} \otimes V^{\otimes 1}$, nous avons

$$\begin{aligned} d^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &= d \circ \mu \circ (i^{(n-1)} \otimes i^{(1)})(v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n) \\ &= \mu \circ (d^{(n-1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(1)})(v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n) \\ &= \mu(d^{(n-1)}(v_1 \cdots v_{n-1}) \otimes v_n + (-1)^{|d||v_1 \cdots v_{n-1}|} v_1 \cdots v_{n-1} \otimes d^{(1)}(v_n)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_{n-1} \right) v_n + (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{n-1}|} v_1 \cdots v_{n-1} f(v_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $d = \bigoplus d^{(n)}$ est unique : il est entièrement déterminé par f et la condition d'être une dérivation de $T(V)$.

Existence. Maintenant, si pour $x \in T(V)$, $k \in \mathbb{K}$ et $v_1 \cdots v_n \in V^{\otimes n}$ on définit un certain d par les formules

$$\begin{aligned} d(1) &:= 0 \\ d(kx) &:= kd(x) \\ d^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &:= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_n \end{aligned} \tag{2.21}$$

on obtient un morphisme d'espaces vectoriels gradués $d : T(V) \to T(V)$ qui est également une dérivation. En effet, pour tout couple p,q tel que $p+q = n$ et $pq \neq 0$ nous avons d'une part

$$d \circ \mu \circ (i^{(p)} \otimes i^{(q)})(v_1 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdots v_{p+q}) = d^{(n)}(v_1 \cdots v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_n$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} & \mu \circ (d^{(p)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(q)})(v_1 \cdots v_p \otimes v_{p+1} \cdots v_{p+q}) \\ =\ & \mu(d^{(p)}(v_1 \cdots v_p) \otimes v_{p+1} \cdots v_{p+q} + (-1)^{|d||v_1 \cdots v_p|} v_1 \cdots v_p \otimes d^{(q)}(v_{p+1} \cdots v_{p+q})) \\ =\ & \left(\sum_{i=1}^{p} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_p \right) v_{p+1} \cdots v_{p+q} \\ & + (-1)^{|f||v_1 \cdots v_p|} v_1 \cdots v_p \left(\sum_{i=1}^{q} (-1)^{|f||v_{p+1} \cdots v_{p+i-1}|} v_{p+1} \cdots f(v_{p+i}) \cdots v_{p+q} \right) \\ =\ & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f||v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots f(v_i) \cdots v_n \end{aligned}$$

De plus, nous avons par définition $d \circ i = f$.

Montrons maintenant, à l'aide de ce résultat, la correspondance bijective annoncée. Soit

$$\phi : \mathrm{Vect}(V, T(V)) \to \mathrm{Dér}(T(V), T(V))$$

qui à un morphisme d'espaces vectoriels gradués $f : V \to T(V)$ associe l'unique dérivation d étendant f que nous venons de construire. Considérons maintenant

$$\psi : \text{Dér}(T(V), T(V)) \to \text{Vect}(V, T(V))$$

qui à d associe $d \circ i$ sa restriction à V. Par construction, $\psi \circ \phi(f) = d \circ i = f$, ce qui implique que ϕ est injective. L'extension de $\psi(d)$ à $T(V)$ étant unique, l'on a également $\phi \circ \psi(d) = d$. Ainsi, $\psi = \phi^{-1}$ et ϕ est une bijection.

Il suffit de remplacer $T(V)$ par $\overline{T}(V)$ et de retirer (2.20) et (2.21) pour obtenir la démonstration dans le cas non-unitaire. □

REMARQUE 2.4.4. Ainsi, une dérivation $d : T(V) \to T(V)$ est entièrement caractérisée par sa restriction $d \circ i : V \to T(V)$.

REMARQUE 2.4.5. Pour retrouver le cas non-gradué, il suffit de considérer un espace vectoriel V comme un espace vectoriel gradué concentré en degré 0 : tous les éléments de V sont de degré 0 et les formules sont les mêmes, les signes en moins.

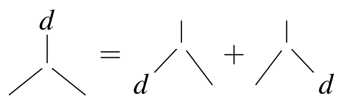
Définition 2.4.6. Soit (C, Δ) une cogèbre coassociative conilpotente (resp. graduée), counitaire ou non. Une *codérivation* par rapport au coproduit de C est une application linéaire (resp. un morphisme de cogèbres graduées) $d : C \to C$ telle que $d(1) = 0$ vérifiant

$$\Delta \circ d = (d \otimes \text{id}_C + \text{id}_C \otimes d) \circ \Delta$$

On peut voir cette relation comme un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\Delta"] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "d\otimes \text{id}_C + \text{id}_C \otimes d"] & C \otimes C \end{tikzcd}$$

ou encore comme un arbre



REMARQUE 2.4.7. Au niveau des éléments cela correspond dans le cas des cogèbres coassociatives à

$$\sum d(x)_{(1)} \otimes d(x)_{(2)} = \sum d(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} + \sum x_{(1)} \otimes d(x_{(2)})$$

et dans le cas gradué à

$$\sum d(x)_{(1)} \otimes d(x)_{(2)} = \sum d(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} + \sum (-1)^{|d||x_{(1)}|} x_{(1)} \otimes d(x_{(2)})$$

.

L'on dispose d'une caractérisation très précise des codérivations sur la cogèbre coassociative colibre associée à un espace vectoriel (gradué ou non, le premier cas recouvrant le deuxième) :

Proposition 2.4.8. *Soit V un espace vectoriel gradué. L'ensemble des codérivations de la cogèbre coassociative colibre $T^c(V)$ -resp. $\overline{T^c}(V)$- est en bijection avec les morphismes d'espaces vectoriels gradués $T^c(V) \to V$ tels que $1 \mapsto 0$ -resp. $\overline{T^c}(V) \to V$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'il existe une unique codérivation étendant un morphisme d'espaces vectoriels gradués $\varphi : T^c(V) \to V$ tel que $\varphi(1) = 0$.

Unicité. Soit $\varphi : T^c(V) \to V$ un morphisme d'espaces vectoriels gradués tel que $\varphi(1) = 0$. Supposons qu'il existe une codérivation $d : T^c(V) \to T^c(V)$ telle que $p \circ d = \varphi$. Alors elle vérifie immédiatement pour tout $x_1 \in \overline{T^c}(V)$

$$\begin{aligned} d(1) &= 0 && \text{par hypothèse} \\ d^{(1)}(x_1) &= \varphi(x_1) && \text{par compatibilité avec } \varphi \end{aligned} \tag{2.22}$$

De plus, il doit faire commuter pour tout n et tout couple r, s tel que $r+s=n$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T^c(V) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\Delta"] & T^c(V) \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "p^{(n)}"] & \\
T^c(V)\otimes T^c(V) \arrow[r, "d\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes d"] & T^c(V)\otimes T^c(V) \arrow[dr, "p^{(r)}\otimes p^{(s)}"] & V^{\otimes n} \arrow[d, "\simeq"] \\
& & V^{\otimes r}\otimes V^{\otimes s}
\end{tikzcd}$$

Nous montrons par induction sur $n = r+s$ que cette condition détermine d de manière unique. Il suffit de considérer les cas où $rs \neq 0$, les autres étant déterminés par (2.22). Examinons d'abord le cas $n=2$ où $r=s=1$. Pour $v_1 \cdots v_m \in V^{\otimes m}$, il faut que

$$\begin{aligned} d^{(2)}(v_1 \cdots v_m) = (p^{(1)} \otimes p^{(1)}) \circ \Delta \circ d(v_1 \cdots v_m) &= (d^{(1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(1)}) \circ \sum_{i=0}^{m} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_m \\ &= \varphi(v_1 \cdots v_{m-1}) v_m + (-1)^{|\varphi||v_1|} v_1 \varphi(v_2 \cdots v_m) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que pour tout $k \leqslant n-1$, $r+s=k$ et $k<m$,

$$d^{(k)}(v_1 \cdots v_m) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-k+1}) v_{i+m-k+2} \cdots v_m$$

Alors, pour $r = n-1$ et $s=1$, $n<m$

$$\begin{aligned} & d^{(n)}(v_1 \cdots v_m) \\ = \; & (p^{(n-1)} \otimes p^{(1)}) \circ \Delta \circ d(v_1 \cdots v_m) \\ = \; & (d^{(n-1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(1)}) \circ \sum_{i=0}^{m} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_m \\ = \; & \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-n+2}) v_{i+m-n+3} \cdots v_m + (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_{n-1}|} v_1 \cdots v_{n-1} \varphi(v_n \cdots v_m) \\ = \; & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-n+1}) v_{i+m-n+2} \cdots v_m \end{aligned}$$

Ainsi, $d = \bigoplus d^{(n)}$ est unique : il est entièrement déterminé par φ et la condition d'être une codérivation de $T^c(V)$.

Existence. Maintenant, si pour $x \in T^c(V)$, $k \in \mathbb{K}$ et $v_1 \cdots v_m \in V^{\otimes m}$ on définit un certain d par les formules

$$\begin{aligned} d(1) &:= 0 \\ d(kx) &:= k d(x) \\ d^{(n)}(v_1 \cdots v_m) &:= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-n+1}) v_{i+m-n+2} \cdots v_m \end{aligned} \tag{2.23}$$

on obtient un morphisme d'espaces vectoriels gradués $d : T^c(V) \to T^c(V)$ bien défini qui est également une codérivation. En effet, pour tout couple r, s tel que $r+s=n$ et $rs \neq 0$ nous avons d'une part

$$(p^{(r)} \otimes p^{(s)}) \circ \Delta \circ d(v_1 \cdots v_m) = d^{(n)}(v_1 \cdots v_m) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-n+1}) v_{i+m-n+2} \cdots v_m$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} & (d^{(r)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(s)}) \circ \sum_{i=0}^{m} v_1 \cdots v_i \otimes v_{i+1} \cdots v_m \\ = & \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-r+1}) v_{i+m-r+2} \cdots v_m \\ & + \sum_{i=r}^{r+s-1} (-1)^{|\varphi||v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-n+1}) v_{i+m-n+2} \cdots v_m \\ = & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{|v_1 \cdots v_i|} v_1 \cdots v_i \varphi(v_{i+1} \cdots v_{i+m-n+1}) v_{i+m-n+2} \cdots v_m \end{aligned}$$

De plus, nous avons par définition $p \circ d = \varphi$.

Montrons maintenant, à l'aide de ce résultat, la correspondance bijective annoncée. Soit

$$\phi : \mathrm{Vect}(T^c(V), V) \to \mathrm{Codér}(T^c(V), T^c(V))$$

qui à un morphisme d'espaces vectoriels gradués $\varphi : T^c(V) \to V$ associe l'unique codérivation d étendant φ que nous venons de construire. Considérons maintenant

$$\psi : \mathrm{Codér}(T^c(V), T^c(V)) \to \mathrm{Vect}(T^c(V), V)$$

qui à d associe $p \circ d$ sa restriction à V au but. Par construction, $\psi \circ \phi(\varphi) = p \circ d = \varphi$, ce qui implique que ϕ est injective. L'extension de $\psi(d)$ à $T^c(V)$ étant unique, l'on a également $\phi \circ \psi(d) = d$. Ainsi, $\psi = \phi^{-1}$ et ϕ est une bijection.

Il suffit de remplacer $T^c(V)$ par $\overline{T^c}(V)$ et de retirer (2.22) et (2.23) pour obtenir la démonstration dans le cas non-counitaire. □

REMARQUE 2.4.9. Ainsi, une codérivation $d : T^c(V) \to T^c(V)$ est entièrement caractérisée par sa projection $p \circ d : T^c(V) \to V$.

REMARQUE 2.4.10. Pour retrouver le cas non-gradué, il suffit de considérer un espace vectoriel V comme un espace vectoriel gradué concentré en degré 0 : dès lors, tous les éléments de V sont de degré 0 et les formules sont les mêmes, les signes en moins.

2.5 Algèbre différentielle graduée, algèbre quasi-libre

Définition 2.5.1. Une *différentielle* sur un espace vectoriel gradué V est un morphisme $d : V \to V$ de degré $|d| = -1$ et de carré nul $d^2 = 0$. On peut le représenter visuellement par une longue suite exacte d'espaces vectoriels :

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

la condition $d^2 = 0$ étant équivalente à l'exactitude de la suite.

REMARQUE 2.5.2. Les espaces vectoriels gradués munis d'une différentielle sont également nommés complexes de chaînes.

Un morphisme de complexes de chaînes $f : (V, d_V) \to (W, d_W)$ est un morphisme d'espaces vectoriels gradués $f : V \to W$ commutant (au sens gradué) avec la différentielle $d_W \circ f = (-1)^{|f|} f \circ d_V$, c'est-à-dire que pour tout n le diagramme suivant commute (à un signe près) :

$$\begin{array}{ccc} V_n & \xrightarrow{d_V^n} & V_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ W_m & \xrightarrow{d_W^m} & W_{m-1} \end{array}$$

Les complexes de chaînes munis de leurs morphismes forment une catégorie notée dgVect.

REMARQUE 2.5.3. Cette catégorie munie du produit tensoriel est en fait une catégorie monoïdale symétrique. L'action du bifoncteur $-\otimes-$ sur les objets et les morphismes de gVect a été définie précédemment ; pour qu'il soit bien défini sur dgVect, il nous faut spécifier ce qui advient de la différentielle. Soient (V, d_V) et (W, d_W) deux complexes de chaînes. Munissons le produit tensoriel du morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$d_{V\otimes W} := d_V \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_V \otimes W$$

Un calcul direct montre que $d^2_{V\otimes W} = 0$. De plus, un calcul aisé montre que si $f : V \to V'$ et $g : W \to W'$ sont des morphismes de complexes de chaînes, alors $f \otimes g$ en est un également. Dès lors, notre bifoncteur $-\otimes-$ est bien défini dans dgVect.

REMARQUE 2.5.4. Ici, $\mathbb{K}$ est considéré comme un espace vectoriel différentiel gradué concentré en degré 0 (sa différentielle est la seule possible).

Définition 2.5.5. La *dérivée* d'un morphisme d'espaces vectoriels gradués $f : V \to W$ entre deux complexes de chaînes est

$$\partial f := d_W \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_V$$

Elle s'annule si et seulement si f est un morphisme de complexes de chaînes.

REMARQUE 2.5.6. La dérivée ∂f est de degré $|\partial f| = |f| - 1$ et est elle-même une différentielle sur l'espace des morphismes d'espaces vectoriels gradués gVect(V, W). En effet, le fait que $d_V^2 = d_W^2 = 0$ entraîne que $\partial^2 = 0$.

Définition 2.5.7. Une *algèbre différentielle graduée* non-unitaire (resp. unitaire) est une algèbre associative graduée (A, μ) non-unitaire (resp. unitaire) munie d'une différentielle d qui soit également une dérivation pour le produit, c'est à dire vérifiant

$$d \circ \mu = \mu \circ (d \otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes d) \tag{2.24}$$

Sur les éléments, cela signifie

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|} a d(b)$$

REMARQUE 2.5.8. Une algèbre différentielle graduée est un monoïde dans la catégorie monoïdale symétrique dgVect. Aussi, demander que d soit une dérivation pour le produit revient à demander que ce produit soit un morphisme de complexes de chaînes. En effet, d'après la remarque (2.5.3) l'équation (2.24) peut également se lire $d_A \circ \mu = \mu \circ d_{A\otimes A}$. Dans une algèbre on parlera toujours par abus de langage de différentielle en voulant dire «différentielle qui est une dérivation pour le produit».

Un *morphisme* d'algèbres différentielles graduées non-unitaires (resp. unitaires) est un morphisme d'algèbres associatives graduées non-unitaires (resp. unitaires) qui soit également un morphisme de complexes de chaînes. Un tel morphisme est toujours de degré 0 par la remarque 2.3.7. Les algèbres différentielles graduées (resp. unitaires) accompagnées de leurs morphismes forment une catégorie notée dgAlg (resp. dguAlg).

EXEMPLES. On peut voir toute algèbre associative graduée dans dgAlg en la plaçant en degré zéro et en la munissant de la différentielle nulle ; autrement il existe une inclusion gAlg $\hookrightarrow$ dgAlg. L'algèbre tensorielle associée à un complexe de chaînes est elle-même une algèbres différentielle graduée (voir plus bas). La cohomologie singulière à coefficient dans un corps fini d'un espace toplogique est une algèbre différentielle graduée, la différentielle étant donnée par l'homomorphisme de Bockstein.

Définition 2.5.9. Une algèbre différentielle graduée $\mathscr{L}(V)$ est dite *libre* si elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre différentielle graduée A et tout morphisme de complexes de chaînes $f : V \to A$ de degré $|f| = 0$, il existe un unique morphisme d'algèbres différentielles graduées $\tilde{f} : \mathscr{L}(V) \to A$ tel que $f = \tilde{f} \circ i$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{L}(V) \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

L'on dispose d'une caractérisation très précise des structures d'algèbre différentielle graduée sur l'algèbre tensorielle associée à un espace vectoriel gradué V :

Proposition 2.5.10. *Soit (V,d) un espace vectoriel différentiel gradué. Alors il existe une unique différentielle D sur l'algèbre tensorielle $T(V)$ -resp. $\overline{T}(V)$- étendant d.*

Démonstration. Soit $d : V \to V$ une différentielle. Considérons le morphisme

$$f : V \xrightarrow{d} V \xrightarrow{i} T(V)$$

Il s'agit d'un morphisme d'espaces vectoriels gradués ; en vertu de la proposition (2.4.3) il existe une unique dérivation $D = \bigoplus D^{(n)} : T(V) \to T(V)$ étendant f, donnée par les formules

$$\begin{aligned} D(1) &:= 0 && (2.25)\\ D(kx) &:= kD(x) \\ D^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &:= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_i) \cdots v_n && (2.26) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que cette dérivation est une différentielle. Vérifions d'abord que $|D| = -1$. Le fait que $|d| = -1$ entraîne que $|d(v_i)| = |v_i| - 1$ pour tout i, de sorte que chacun des éléments de la somme (2.26) est de même degré $|v_1| + \cdots + |v_n| - 1$. Ainsi,

$$|D^{(n)}(\underline{v})| = |D^{(n)}| + |\underline{v}| = |\underline{v}| - 1 \implies |D^{(n)}| = -1$$

Montrons à présent que $D^2 = 0$. Le fait que $d^2 = 0$ entraîne que

$$\begin{aligned} D^{(n)}D^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\sum_{j<i} (-1)^{|v_1 \cdots v_{j-1}|} (-1)^{|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_j) \cdots d(v_i) \cdots v_n \\ &\quad \cancel{+ (-1)^{2|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d^2(v_i) \cdots v_n} \\ &\quad + \sum_{j>i} (-1)^{|v_1 \cdots d(v_i) \cdots v_{j-1}|} (-1)^{|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_i) \cdots d(v_j) \cdots v_n \Bigg) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\sum_{j<i} (-1)^{|v_1 \cdots v_{j-1}|} (-1)^{|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_j) \cdots d(v_i) \cdots v_n \\ &\quad + \sum_{j>i} (-1)^{|v_1 \cdots v_i \cdots v_{j-1}| - 1} (-1)^{|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_i) \cdots d(v_j) \cdots v_n \Bigg) \\ &= \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (-1)^{|v_1 \cdots v_{j-1}|} (-1)^{|v_1 \cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_j) \cdots d(v_i) \cdots v_n \\ &\quad - \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (-1)^{|v_1 \cdots v_{l-1}|} (-1)^{|v_1 \cdots v_{k-1}|} v_1 \cdots d(v_k) \cdots d(v_l) \cdots v_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

D est ainsi l'unique différentielle telle que $p \circ f = p \circ D \circ i = d$.

Il suffit de remplacer $T(V)$ par $\overline{T}(V)$ et de retirer (2.25) pour obtenir la démonstration dans le cas non-unitaire. □

À moins de mention contraire, l'algèbre tensorielle associée à un complexe de chaînes (V,d) sera supposée munie de la différentielle D induite par d. Il nous est à présent possible de montrer, à l'aide de la proposition précédente, que la propriété de liberté de l'algèbre tensorielle «passe au monde dg».

Proposition 2.5.11. *L'algèbre tensorielle (resp. l'algèbre tensorielle réduite) munie de l'injection est libre dans la catégorie des algèbres différentielles graduées unitaires (resp. non-unitaires).*

Démonstration. Soit A une algèbre différentielle graduée, $f : V \to A$ un morphisme de complexes de chaînes de degré 0. La proposition (2.3.10) nous assure qu'il existe un unique morphisme d'algèbres graduées $\tilde{f} : T(V) \to A$ tel que $\tilde{f} \circ i = f$. Il suffit dès lors de montrer que $\tilde{f}$ est un morphisme de complexes de chaînes, c'est-à-dire montrer que
$$\tilde{f} \circ D = d_A \circ \tilde{f}$$
Soit $v_1 \cdots v_n \in V^{\otimes n}$. Étant donné que f est un morphisme de complexes de chaînes de degré 0,
$$\begin{aligned}
d_A \circ \tilde{f}^{(n)}(v_1 \cdots v_n) &= d_A(f(v_1) \cdots f(v_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f(v_1)\cdots f(v_{i-1})|} f(v_1) \cdots (d_A \circ f)(v_i) \cdots f(v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\cancel{(i-1)|f|}+|v_1\cdots v_{i-1}|} f(v_1) \cdots (d_A \circ f)(v_i) \cdots f(v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1\cdots v_{i-1}|} f(v_1) \cdots (f \circ d)(v_i) \cdots f(v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1\cdots v_{i-1}|} \tilde{f}^{(n)}(v_1 \cdots d(v_i) \cdots v_n) \\
&= \tilde{f}_n \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1\cdots v_{i-1}|} v_1 \cdots d(v_i) \cdots v_n \right) \\
&= \tilde{f}^{(n)} \circ D^{(n)}(v_1 \cdots v_n)
\end{aligned}$$
□

REMARQUE 2.5.12. Nous nous sommes servis du fait que pour toute algèbre différentielle graduée A, la différentielle d_A est donnée explicitement sur les éléments $a_1 \cdots a_n \in A$ par la formule
$$d_A(a_1 \cdots a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|} a_1 \cdots d_A(a_i) \cdots a_n$$
La preuve de cette assertion est analogue à celle de la proposition 2.4.3.

Définition 2.5.13. Une algèbre différentielle graduée est dite *quasi-libre* si elle est libre en tant qu'algèbre graduée (au sens de la définition 2.3.9).

EXEMPLE 2.5.14. (**La construction cobar**) Soit C une cogèbre différentielle graduée coaugmentée $C = \mathbb{K}1 \oplus \overline{C}$. Considérons le morphisme d'espaces vectoriels gradués
$$\begin{aligned}
\Delta_s : \mathbb{K}s^{-1} &\to \mathbb{K}s^{-1} \otimes \mathbb{K}s^{-1} \\
s^{-1} &\mapsto -s^{-1} \otimes s^{-1}
\end{aligned}$$
Il est de degré $|\Delta_s| = -1$. Considérons maintenant la composition
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{C} \arrow[d, "\Delta_s \otimes \overline{\Delta}"] & \\
\mathbb{K}s^{-1} \otimes \mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{C} \otimes \overline{C} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & \\
\mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{C} \otimes \mathbb{K}s^{-1} \otimes \overline{C} \arrow[r, "i^{(2)}"] & T(s^{-1}\overline{C})
\end{tikzcd}$$

et notons la f. Il s'agit d'un morphisme d'espaces vectoriels gradués de degré -1 (seul Δ_s est de degré -1 ; tous les autres morphismes sont de degré 0). Par la proposition (2.4.3) il existe une unique dérivation

$$d_2 : T(s^{-1}\overline{C}) \to T(s^{-1}\overline{C})$$

étendant f. Cette dérivation est en fait une *différentielle* :

Proposition 2.5.15. *La coassociativité de Δ implique que $d_2^2 = 0$.*

D'autre part, la codifférentielle $d_C : C \to C$ induit, par la proposition (2.5.10), une unique différentielle

$$d_1 : T(s^{-1}\overline{C}) \to T(s^{-1}\overline{C})$$

sur $T(s^{-1}\overline{C})$. Maintenant, le fait que le coproduit Δ_C soit un morphisme de complexes de chaînes entraîne que d_1 et d_2 *anticommutent*

$$d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$$

Dès lors, $d_{\Omega C} := d_1 + d_2$ est une différentielle sur $T(s^{-1}\overline{C})$. On nomme l'algèbre différentielle graduée

$$\Omega C := (T(s^{-1}\overline{C}), d_{\Omega C})$$

la *construction cobar* de C. Elle est notée ainsi par analogie avec la construction de l'espace des lacets. La correspondance qu'elle induit est en fait *fonctorielle*, c'est- à-dire que $\Omega-$ est un foncteur des la catégorie des cogèbres différentielles graduées coaugmentées vers la catégorie des algèbres différentielles graduées. Chaque algèbre ΩC est quasi-libre dans cette catégorie.

On traite à présent le cas des cogèbres.

Définition 2.5.16. Une *cogèbre différentielle graduée* non-counitaire (resp. counitaire) est une cogèbre coassociative graduée (C, Δ) non-counitaire (resp. counitaire) munie d'une différentielle d qui soit également une codérivation pour le coproduit (auquel cas on la dit également *codifférentielle* [2]), c'est-à-dire vérifiant $d(1) = 0$ et

$$\Delta \circ d = (d \otimes \mathrm{id}_C + \mathrm{id}_C \otimes d) \circ \Delta$$

Sur les éléments, cela signifie

$$\sum d(x)_{(1)} \otimes d(x)_{(2)} = \sum d(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} + \sum (-1)^{|x_{(1)}|} x_{(1)} \otimes d(x_{(2)})$$

REMARQUE 2.5.17. Une cogèbre différentielle graduée est un monoïde dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathrm{dgVect}^{\mathrm{op}}$. Par ailleurs, demander que d soit une codérivation pour le coproduit revient à demander que ce coproduit soit un morphisme de complexes de chaînes.

Un *morphisme* de cogèbre différentielle graduée non-counitaire (resp. counitaire) est un morphisme de cogèbres coassociatives graduées non-counitaires (resp. counitaires) qui soit également un morphisme de complexes de chaînes. Un tel morphisme est toujours de degré 0 par la remarque 2.3.12. Les cogèbres différentielles graduées (resp. counitaires) accompagnées de leurs morphismes forment une catégorie notée dgCog (resp. dgu-Cog).

EXEMPLES. Toute cogèbre coassociative graduée peut être vue comme cogèbre différentielle graduée en la plaçant en degré 0 et en la munissant de la différentielle nulle. La cogèbre tensorielle associée à un complexe de chaînes est elle-même une cogèbre différentielle graduée (voir plus bas). L'homologie à coefficients dans un corps d'un espace topologique est une cogèbre différentielle graduée, de différentielle nulle.

2. Bien que la différentielle d'une algèbre différentielle graduée s'appelle toujours différentielle (tout en vérifiant plus de propriétés), la différentielle d'une cogèbre différentielle graduée est appelée codifférentielle, et donc change de nom.

Définition 2.5.18. Une cogèbre différentielle graduée $\mathscr{L}(C)$ est dite *colibre* si elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute cogèbre coassociative différentielle graduée conilpotente C et tout morphisme de complexes de chaînes $\varphi : C \to V$ de degré 0 tel que $\varphi(1) = 0$, il existe un unique morphisme de cogèbres différentielles graduées $\tilde{\varphi} : C \to \mathscr{L}^c(V)$ tel que $\varphi = p \circ \tilde{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathscr{L}^c(V) \arrow[r, "p"'] & V \end{tikzcd}$$

L'on dispose d'une caractérisation très précise des structures de cogèbre différentielle graduée sur la cogèbre tensorielle associée à un espace vectoriel gradué V :

Proposition 2.5.19. *Soit (V,d) un espace vectoriel différentiel gradué. Il existe une unique codifférentielle D sur la cogèbre tensorielle $T^c(V)$ -resp. $\overline{T^c}(V)$- étendant d.*

Démonstration. Cette preuve est duale à celle de la proposition 2.5.10. □

À moins de mention contraire, la cogèbre tensorielle associée à un complexe de chaînes (V,d) sera supposée munie de la codifférentielle D induite par d. Il est possible de montrer, à l'aide de la proposition précédente, que la propriété de coliberté de la cogèbre tensorielle «passe au monde dg».

Proposition 2.5.20. *La cogèbre tensorielle (resp. la cogèbre tensorielle réduite) munie de la projection est colibre dans la catégorie des cogèbres différentielles graduées counitaires (resp. non-counitaires).*

Démonstration. Cette preuve est duale à celle de la proposition 2.5.11. □

Définition 2.5.21. Une cogèbre différentielle graduée est dite *quasi-colibre* si elle est colibre en tant que cogèbre graduée (au sens de la définition 2.3.13)

EXEMPLE 2.5.22. (**La construction bar**) Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$. Considérons le morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{array}{rcl} \Pi_s : \mathbb{K}s \otimes \mathbb{K}s & \to & \mathbb{K}s \\ s \otimes s & \mapsto & s \end{array}$$

Il est de degré $|\Pi_s| = -1$. Notons $\mu_{\overline{A}} : \overline{A} \otimes \overline{A} \to \overline{A}$ la restriction du produit à la partie réduite de A. Considérons maintenant la composition

$$\begin{tikzcd} T^c(s\overline{A}) \arrow[r, "p^{(2)}"] & \mathbb{K}s \otimes \overline{A} \otimes \mathbb{K}s \otimes \overline{A} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}"] \\ & \mathbb{K}s \otimes \mathbb{K}s \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \arrow[d, "\Pi_s\otimes\mu_{\overline{A}}"] \\ & \mathbb{K}s \otimes \overline{A} \end{tikzcd}$$

et notons la φ. Il s'agit d'un morphisme d'espaces vectoriels gradués de degré -1 (seule Π_s est de degré -1 ; tous les autres morphismes sont de degré 0). Par la proposition (2.4.8) il existe une unique codérivation

$$d_2 : T^c(s\overline{A}) \to T^c(s\overline{A})$$

étendant φ. Cette codérivation est en fait une *codifférentielle* :

Proposition 2.5.23. *L'associativité de μ implique que $d_2^2 = 0$.*

D'autre part, la différentielle $d_A : A \to A$ induit, par la proposition (2.5.19), une unique codifférentielle

$$d_1 : T^c(s\overline{A}) \to T^c(s\overline{A})$$

sur $T^c(s\overline{A})$. Maintenant, le fait que le produit μ_A soit un morphisme de complexes de chaînes entraîne que d_1 et d_2 *anticommutent*

$$d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$$

Dès lors, $d_{\mathrm{B}A} := d_1 + d_2$ est une codifférentielle sur $T^c(s\overline{A})$. On nomme la cogèbre différentielle graduée conilpotente

$$\mathrm{B}A := (T^c(s\overline{A}), d_{\mathrm{B}A})$$

la *construction bar* de A. Elle est notée ainsi par analogie avec la construction du classifiant d'un groupe topologique. La correspondance qu'elle induit est en fait *fonctorielle*, c'est- à-dire que $\mathrm{B}-$ est un foncteur des la catégorie des algèbres différentielles graduées augmentées vers la catégorie des cogèbres différentielles graduées conilpotentes. Chaque cogèbre $\mathrm{B}A$ est quasi-colibre dans cette catégorie.

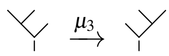
2.6 Algèbre associative à homotopie près

Pour la présentation qui suit nous avons puisé notamment dans la superbe introduction de la thèse d'Alain Prouté [Pro11] de même que le chapitre 9 du livre de Jean-Louis Loday et Bruno Vallette [LV12].

Imaginons une algèbre associative différentielle graduée A où le produit $\mu_2 : A^{\otimes 2} \to A$ n'est associatif qu'à homotopie près : il y existe une homotopie (au sens des complexes de chaînes) $\mu_3 : A^{\otimes 3} \to A$ entre les deux manières de composer un triplet éléments par applications successives de μ_2.

$$\mu_2(\mu_2, \mathrm{id}) - \mu_2(\mathrm{id}, \mu_2) = d_A \circ \mu_3 + \mu_3 \circ d_{A^{\otimes 3}}$$

Il est possible de se représenter cette homotopie comme une flèche entre les arbres correspondants.



(2.27)

Considérons maintenant les 5 manières de composer quatre éléments de l'algèbre par applications successives de μ_2. L'homotopie μ_3 induit 5 homotopies entre ces éléments, représentées sur la figure 2.1. Ces homotopies sont-elles homotopes entre elles ? Autrement dit, existe-t-il une homotopie $\mu_4 : A^{\otimes 4} \to A$ entre toutes ces homotopies ? Qu'en est-il des homotopies supérieures ?

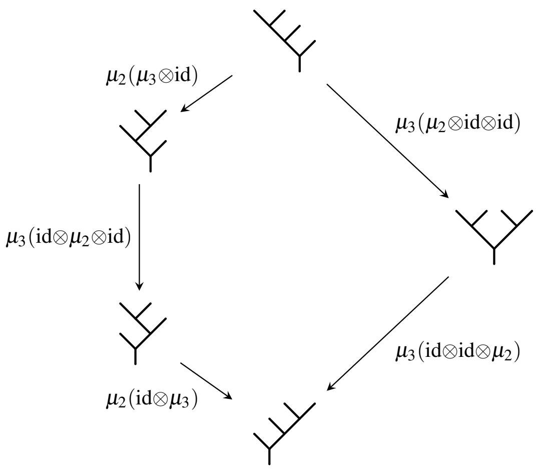


FIGURE 2.1 – Homotopies entre les 5 manières de composer 4 éléments d'une algèbre.

Définition 2.6.1. (Définition I) Une *algèbre associative à homotopie près* est un espace vectoriel gradué A doté d'une famille morphismes d'espaces vectoriels gradués $\{m_n : A^{\otimes n} \to A\}_{n\geqslant 1}$ de degré $n-2$ appelés «opérations» vérifiant les relations

$$\sum_{\substack{p+q+r=n \\ p+r\geqslant 0,\ q\geqslant 1}} (-1)^{p+qr} m_{p+1+r} \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes m_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) = 0 \tag{2.28}$$

Disséquons un peu cette définition, en commençant par $n = 1$. L'opération m_1 est de degré -1 et vérifie

$$m_1 \circ m_1 = 0$$

Il s'agit donc d'une différentielle faisant de A un complexe de chaînes. L'opération m_2 est de degré 0 et vérifie

$$m_1 \circ m_2 - m_2 \circ (m_1, \mathrm{id}) - m_2 \circ (\mathrm{id}, m_1)$$

L'opération m_1 est donc une dérivation par rapport à m_2, qui ressemble beaucoup à un produit... Vérifie-t-elle la relation d'associativité ? Examinons la relation pour $n = 3$.

$$m_1 \circ m_3 + m_2 \circ (m_2, \mathrm{id}) - m_2 \circ (\mathrm{id}, m_2) + m_3 \circ (m_1, \mathrm{id}, \mathrm{id}) + m_3 \circ (\mathrm{id}, m_1, \mathrm{id}) + m_3 \circ (\mathrm{id}, \mathrm{id}, m_1) = 0$$

Il s'agit d'une homotopie entre les deux termes définissant l'associativité de m_2. La relation pour $n = 4$ se lit

$$\begin{aligned} &m_1 \circ m_4 - m_2 \circ (m_3, \mathrm{id}) - m_2 \circ (\mathrm{id}, m_3) + m_3 \circ (m_2, \mathrm{id}, \mathrm{id}) - m_3 \circ (\mathrm{id}, m_2, \mathrm{id}) + m_3 \circ (\mathrm{id}, \mathrm{id}, m_2) \\ &- m_4 \circ (m_1, \mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}) - m_4 \circ (\mathrm{id}, m_1, \mathrm{id}, \mathrm{id}) - m_4 \circ (\mathrm{id}, \mathrm{id}, m_1, \mathrm{id}) - m_4 \circ (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}, m_1) = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une homotopie entre les homotopies induites par m_3. Les relations (2.28) pour $n \geqslant 5$ définissent une série d'homotopies supérieures assurant la *cohérence* de la relation d'homotopie dans l'algèbre.

Considérons $(A, d := m_1)$ comme un complexe de chaînes admettant une structure différentielle donnée par les relations (2.28) réécrites pour $n \geqslant 2$ à l'aide des dérivées

$$\partial(m_n) := d_A \circ m_n + m_n \circ d_{A^{\otimes n}} = d \circ m_n - (-1)^{n-2} m_n \circ \sum_i (\mathrm{id}, \ldots, d, \ldots, \mathrm{id}).$$

Nous obtenons

$$\partial(m_n) = - \sum_{\substack{p+q+r=n \\ k>1,\ q>1}} (-1)^{p+qr} m_{p+1+r} \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes m_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) \tag{2.29}$$

Ainsi, nous retrouvons bien la condition pour m_1 d'être une dérivation par rapport à m_2

$$\partial(m_2) = 0.$$

La relation pour $n = 3$ se lit à présent

$$\partial(m_3) = m_2(m_2 \otimes \mathrm{id}) - m_2(\mathrm{id} \otimes m_2)$$

et indique bien que la relation d'associativité impliquant m_2 n'est pas égale à 0 mais bien le *bord* d'une opération d'arité supérieure et de degré 1 : il s'agit du bord topologique de l'intervalle représenté par l'équation (2.27). De même, la relation pour $n = 4$ se lit

$$\partial(m_4) = m_2(m_3 \otimes \mathrm{id}) m_2(\mathrm{id} \otimes m_3) - m_3(m_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) + m_3(\mathrm{id} \otimes m_2 \otimes \mathrm{id}) - m_3(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes m_2)$$

et il s'agit du bord (au sens des chaînes cellulaires) de la cellule de dimension 2 définie par la figure 2.1. La nature précise de cette correspondance entre les bords algébriques et les bords topologiques sera élucidée au chapitre 4.

REMARQUE 2.6.2. Toute algèbre différentielle graduée (non-unitaire) est une A_∞-algèbre en posant $m_1 = -d$, $m_2 = \mu$ et $m_n = 0$ pour tout $n \geqslant 3$. Inversement, toute A_∞-algèbre pour laquelle $m_n = 0$ pour tout $n \geqslant 3$ définit une algèbre différentielle graduée (non-unitaire).

EXEMPLES. Les chaînes singulières de l'espace de lacets pointés d'un espace topologique $C_\bullet(\Omega X)$ forment une algèbres associative à homotopie près. Il en est de même de la cohomologie singulière de tout espace topologique.

On peut définir une A_∞-algèbre sur un espace vectoriel gradué A de manière plus conceptuelle et plus succinte : il s'agit d'une structure différentielle sur la cogèbre colibre associée à la suspension de A.

Définition 2.6.3. (Définition II) Une *algèbre associative à homotopie près* est un espace vectoriel gradué $A = \{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dont la cogèbre colibre $\overline{T^c}(sA)$ est munie d'une codifférentielle $m : \overline{T^c}(sA) \to \overline{T^c}(sA)$

Proposition 2.6.4. *Les définitions I et II sont équivalentes.*

Démonstration. Définissons d'abord les deux morphismes $i : A \to sA$ et $j : sA \to A$ par $i(a) := sa$ et $j(sa) := a$. Il est clair que $j \circ i = \mathrm{id}_A$ et $i \circ j = \mathrm{id}_{sA}$. Maintenant, une codérivation m de degré $|m| = -1$ sur $\overline{T^c}(sA)$ est équivalente, par la proposition (2.4.8) à un morphisme d'espaces vectoriels gradués $D : \overline{T^c}(sA) \to sA$, c'est-à-dire à une famille de morphismes $D^{(n)} : (sA)^{\otimes n} \to sA$ de degré -1. La donnée de ces derniers est équivalente à la donnée d'une famille de morphismes $m_n : A^{\otimes n} \to A$ de degré $n-2$. En effet, dans un sens il suffit de poser $m_n := j \circ D^{(n)} \circ i^{\otimes n}$, dans l'autre de poser $D^{(n)} := i \circ m_n \circ j^{\otimes n}$; ayant $|i| = 1$ et $|j| = -1$, les propriétés d'additivité du degré donnent bien les degrés attendus pour m_n et $D^{(n)}$ selon le cas.

Le fait que cette codérivation soit de carré nul est équivalent aux relations (2.28). En effet, toujours par la proposition (2.4.8), $m^2 = 0 \iff D^2 = 0$. Notons pour simplifier les notations $V := sA$ et prenons $v_1 \cdots v_n \in V^{\otimes n}$. Alors,

$$\begin{aligned} D(v_1 \cdots v_n) &= \sum_{p+q+r=n} (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes D^{(q)} \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) \circ (v_1 \cdots v_n) \\ &= \sum_{p+q+r=n} (-1)^{|v_1 \cdots v_p|} v_1 \cdots v_p D^{(q)}(v_{p+1} \cdots v_{p+q}) v_{n-r+1} \cdots v_n \end{aligned}$$

En appliquant D une deuxième fois on obtient

$$\begin{aligned} D^2 = & \sum_{\substack{p+q+r=n \\ i+k+l=p}} (\mathrm{id}^{\otimes i} \otimes D^{(k)} \otimes \mathrm{id}^{\otimes}) \otimes D^{(q)} \otimes \mathrm{id}^{\otimes r} \\ & + \sum_{\substack{p+q+r=n \\ i+j=p \\ l+m=r}} \mathrm{id}^{\otimes i} \otimes \left[D^{(k)} \circ (\mathrm{id}^{\otimes j} \otimes D^{(q)} \otimes \mathrm{id}^{\otimes l}) \right] \otimes \mathrm{id}^{\otimes m} \\ & + \sum_{\substack{p+q+r=n \\ i+k+l=r}} \mathrm{id}^{\otimes p} \otimes D^{(q)} \otimes (\mathrm{id}^{\otimes i} \otimes D^{(k)} \otimes \mathrm{id}^{\otimes l}) \end{aligned} \tag{2.30}$$

La première et la troisième sommation s'annulent du fait de la convention des signes de Koszul. On montre maintenant que le deuxième terme de la sommation s'annule si et seulement si

$$\sum_{p+q+r=n} D^{(k)} \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes D^{(q)} \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) = 0 \tag{2.31}$$

Il est clair que si l'équation $D^2 = 0$, l'équation (2.31) est vérifiée. Dans l'autre sens, on procède par induction sur n. Supposons que les relations (2.31) sont vérifiées. Alors pour $n = 1$ la somme (2.30) s'annule. Supposons que pour tout k plus petit ou égal à $n-1$, (2.30) s'annule. Alors l'hypothèse d'induction et le fait que les relations (2.31) sont vérifiées impliquent que (2.30) s'annule pour $k = n$. Enfin, l'apparition des signes $(-1)^{p+qr}$ découle de l'ajout des suspensions et désuspensions. □

Nous avons présenté un peu plus tôt la construction bar qui à une algèbre différentielle graduée (coaugmentée) A associe une cogèbre colibre différentielle graduée (conilpotente) $\mathrm{B}A$, c'est-à-dire la cogèbre tensorielle d'un certain module $M := s\overline{A}$

$$\mathrm{B}A := \bigoplus_{n \geqslant 0} M^n$$

munie d'une différentielle $\partial := d_{\mathrm{BA}}$. Or, la différentielle d'une cogèbre colibre est entièrement déterminée, comme nous l'avons vu, par ses composantes

$$\partial_i : M^i \to M$$

Dans la construction bar, seules deux de ces composantes sont non-nulles ; ∂_1 et ∂_2 qui sont à peu de choses près la différentielle $d : A \to A$ et le produit $\mu : A \otimes A \to A$. Donc, à partir d'une algèbre dg, qui est un cas particulier d'A_∞-algèbre, nous avons associé une cogèbre colibre munie d'une structure différentielle.

Prenons maintenant le problème à l'envers : partons d'une cogèbre colibre différentielle graduée quelconque, pour laquelle les diverses composantes $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_i, \ldots$ existent. Y aurait-il moyen de l'identifier comme la construction bar de quelque chose ? La réponse est donnée par la proposition précédente : toute cogèbre colibre munie d'une différentielle est la construction bar d'une A_∞-algèbre [référence = Stasheff ?], où chaque composante ∂_i provient d'une opération m_i. Nous obtenons ainsi un isomorphisme de catégories

$$\{A_\infty - \text{alg}\} \xrightarrow{B(-)} \{\text{cogèbre conilpotente quasi-colibre dg}\}$$

Chapitre 3

Opérades et coopérades

L'étude des opérades permet de comprendre de manière unifiée un grand nombre de structures algébriques mettant en jeu des opérations à plusieurs entrées et une sortie. Le monde des algèbres et des cogèbres, étudié dans le chapitre précédent, est en quelque sorte le fer de lance du monde opéradique : plutôt que de ne considérer qu'une seule opération à deux entrées, nous allons considérer une *famille* d'opérations à n entrées pour n quelconque. Nous allons à la fois généraliser la notion d'algèbre associative qui apparaîtra comme un cas particulier d'opérade mais aussi toutes les constructions qui y sont associées, de l'algèbre libre au monde différentiel gradué.

3.1 Opérades algébriques, opérade libre

Livrons-nous à une expérience de pensée qui nous permettra d'entrer dans le monde opéradique. Elle consiste à voir un objet «ancien», les algèbres associatives, sous un regard «nouveau», la composition des opérations. Associons à un élément a d'une algèbre associative A une opération à une entrée et une sortie μ_a qui à un élément b de l'algèbre associe son produit avec a.

$$\begin{aligned} \mu_a : A &\to A \\ b &\mapsto ba \end{aligned}$$

Représentons cette opération par un arbre à une feuille et un sommet interne, étiqueté par μ_a. La possibilité de faire le produit $\mu(b \otimes a)$ de deux éléments de A se traduit ici par la possibilité de *composer deux opérations* («multiplication par a» et «multiplication par b») en une nouvelle opération («multiplication par ba»).

$$(b \otimes a \xrightarrow{\mu} ba) \quad \rightsquigarrow \quad (\mu_a \otimes \mu_b \xrightarrow{\circ} \mu_a \circ \mu_b = \mu_{ba})$$

c'est-à-dire de faire la *greffe* des arbres correspondants, puis de *contracter son arête interne* (figure 3.1).

FIGURE 3.1 – Le produit d'une algèbre vu comme composition d'opérations.

La lecture des arbres se fait «par gravité», c'est-à-dire du haut vers le bas. On peut s'imaginer un élément de l'algèbre qui arriverait par le haut, s'insèrerait par une feuille dans les opérations puis ressortirait par la racine, transformé. Notons que c'est l'associativité du produit μ qui permet d'écrire que la composition des opérations associées à deux éléments est égale à l'opération associée à leur produit.

$$\mu_a \circ \mu_b = \mu_{ba}$$

Cette même associativité du produit implique *l'associativité de la composition des opérations*.

$$\mu_a \circ (\mu_b \circ \mu_c) = \mu_a \circ \mu_{cb} = \mu_{(cb)a} = \mu_{c(ba)} = \mu_{ba} \circ \mu_c = (\mu_a \circ \mu_b) \circ \mu_c$$

Il est clair à présent que nous disposons de deux points de vue équivalents sur une algèbre : il est possible de la voir comme un espace vectoriel *d'éléments* munis d'un *produit* associatif ou comme un espace vectoriel *d'opérations* munies d'une *composition* associative. Ce deuxième point de vue est fécond et permet de généraliser la notion d'algèbre à celle d'opérade.

Considérons maintenant un nombre quelconque d'opérations à un nombre quelconque d'entrées et une sortie ; munissons-nous pour tout n d'un *espace vectoriel d'opérations* à n entrées et une sortie.

Définition 3.1.1. Un $\mathbb{N}$-*module* M est une famille $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$-modules indicée par les naturels. Un *morphisme* entre deux $\mathbb{N}$-modules M et N est une famille d'applications linéaires $f_n : M(n) \to N(n)$. Les $\mathbb{N}$-modules munis de leurs morphismes forment une catégorie notée $\mathbb{N}$-mod.

EXEMPLES. La famille $I = (0, \mathbb{K}, 0, 0, ...)$ est un $\mathbb{N}$-module. De manière plus générale, tout espace vectoriel peut être vu comme un $\mathbb{N}$-module concentré en arité 1. L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel vers un autre étant lui-même un espace vectoriel pour l'addition -locale- des fonctions (la catégorie Vect est *enrichie* sur elle-même), la famille $\mathrm{End}_V := \{\mathrm{Vect}(V^{\otimes n}, V)\}_{n\geqslant 0}$ associée à un espace vectoriel V forme un $\mathbb{N}$-module.

Représentons-nous une opération μ de $M(n)$, dite opération *d'arité n*, par une *corolle* ; un arbre à n feuilles et un sommet interne décoré par μ. Comment composer plusieurs opérations d'arités différentes ? Exactement comme nous l'avons fait plus tôt, à l'aide de la greffe des arbres et la contraction des sommets (figure 3.2). On souhaite que cette composition des opérations soit associative, comme dans le cas des algèbres. En d'autres

FIGURE 3.2 – La composition d'opérations d'arités différentes vus comme greffe de corolles.

mots, on cherche une structure de monoïde dans la catégorie des $\mathbb{N}$-modules. Il faut donc doter cette dernière d'une structure monoïdale.

Définition 3.1.2. Le *produit de composition* de deux $\mathbb{N}$-modules M et N est défini par la formule suivante.

$$(M \circ N)(n) := \bigoplus_{k\geqslant 0} M(k) \otimes N^{\otimes k}(n) \quad \text{où} \quad N^{\otimes k}(n) := \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} N(i_1) \otimes \cdots \otimes N(i_k)$$

Le produit de composition effectue le travail de la flèche de gauche dans la figure (3.2) : des opérations $\nu_1, ..., \nu_k$ d'arités $i_1, ..., i_k$ dans N telles que $i_1 + \cdots + i_k = n$ sont greffées à une opération μ de d'arité k dans M. Ce produit de composition spécial des $\mathbb{N}$-modules, adapté à la composition des opérations, donne à ($\mathbb{N}$-mod,$\circ$,I) une structure de catégorie monoïdale. Le $\mathbb{N}$-module I agit comme unité et les propriétés de $\otimes$ et $\oplus$ dans la catégorie Vect permettent aisément de vérifier les axiomes (voir [LV12], section 5.1). Nous avons précisé l'action du bifoncteur $- \circ -$ sur les objets de $\mathbb{N}$-mod ; il reste encore à préciser son action sur les morphismes. Supposons que nous ayons une paire de morphismes de $\mathbb{N}$-modules $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$. Leur *produit de composition* est défini par

$$\begin{array}{rcccl} f \circ g & : & M \circ N & \to & M' \circ N' \\ & & (\mu; \nu_1, ..., \nu_k) & \mapsto & (f(\mu); g(\nu_1), ..., g(\nu_k)) \end{array}$$

REMARQUE 3.1.3. La notation $\circ$ est ambigüe ; il faudra absolument préciser selon le contexte si l'on parle de la composition de N-modules (produit monoïdal) ou de la composition de morphismes. Dans la suite de ce mémoire, **nous adopterons la notation de concaténation** pour ces derniers de manière à éviter toute confusion.

Maintenant que nous disposons d'une structure monoïdale sur la catégorie des $\mathbb{N}$-modules, il est possible de parler de monoïde dans cette catégorie. Le morphisme de multiplication (voir annexe A) pour ce monoïde est précisément la deuxième flèche dans la figure (3.2), c'est-à-dire la composition des opérations.

Définition 3.1.4. (Opérade algébrique, définition classique) Une *opérade algébrique non-symétrique non-unitaire* est un $\mathbb{N}$-module $\mathscr{P}$ muni d'un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\gamma : \mathscr{P}\circ\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ appelé «composition» tel que

$$\gamma(\gamma\circ \mathrm{id}_{\mathscr{P}}) = \gamma(\mathrm{id}_{\mathscr{P}}\circ\gamma).$$

S'il existe de plus un morphisme $\eta : I \to \mathscr{P}$ appelé «unité» tel que

$$\gamma(\eta\circ\mathrm{id}_{\mathscr{P}}) = \gamma(\mathrm{id}_{\mathscr{P}}\circ\eta) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$$

on la dit *opérade non-symétrique unitaire* et on note $\mathrm{id} := \eta(1_{\mathbb{K}}) \in \mathscr{P}(1)$, opération appelée «identité». Les deux relations précédentes sont plus aisément représentées par les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{P}\circ\mathscr{P})\circ\mathscr{P} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma\circ\mathrm{id}"] & \mathscr{P}\circ(\mathscr{P}\circ\mathscr{P}) \arrow[r, "\mathrm{id}\circ\gamma"] & \mathscr{P}\circ\mathscr{P} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathscr{P}\circ\mathscr{P} \arrow[rr, "\gamma"] & & \mathscr{P}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I\circ\mathscr{P} \arrow[r, "\eta\circ\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathscr{P}\circ\mathscr{P} \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{P}\circ I \arrow[l, "\mathrm{id}\circ\eta"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& \mathscr{P} &
\end{tikzcd}$$

Les éléments $\mu, \nu, ... \in \mathscr{P}(m)$ sont appelés *opérations d'arité m.*

REMARQUE 3.1.5. La donnée de γ et η est équivalente à la donnée pour tout n d'une famille d'applications linéaires

$$\begin{aligned}
\gamma_{i_1,\ldots,i_k} : \mathscr{P}(k)\otimes\mathscr{P}(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathscr{P}(i_k) &\to \mathscr{P}(i_1+\cdots+i_k) \\
\mu\otimes\nu_1\otimes\cdots\otimes\nu_k &\mapsto \gamma(\mu;\nu_1,\ldots,\nu_k)
\end{aligned}$$

où $i_1+\cdots+i_k = n$ et d'un élément $\mathrm{id}\in\mathscr{P}(1)$ tel que $\gamma(\mathrm{id},\nu) = \nu$ et $\gamma(\mu;\mathrm{id},\ldots,\mathrm{id}) = \mu$.

EXEMPLES. Le $\mathbb{N}$-module unité $I = (0,\mathbb{K},0,0,\ldots)$ est une opérade pour les deux morphismes $\gamma(\mu;\nu_1,\ldots,\nu_k) := \mu\nu_1\cdots\nu_k$ et $\eta = \mathrm{id}_I$. La famille $\mathrm{End}_V := \{\mathrm{Vect}(V^{\otimes n}, V)\}_{n\geqslant 0}$ associée à un espace vectoriel V forme une opérade appelée «opérade des endomorphismes». La composition des opérations est ici *la composition des morphismes* (voir la figure 3.3)

$$\gamma(f;f_1,\ldots,f_k) := f(f_1\otimes\cdots\otimes f_k)$$

et l'élément identité est l'application identité $\mathrm{id} := \mathrm{id}_V : V \to V$.

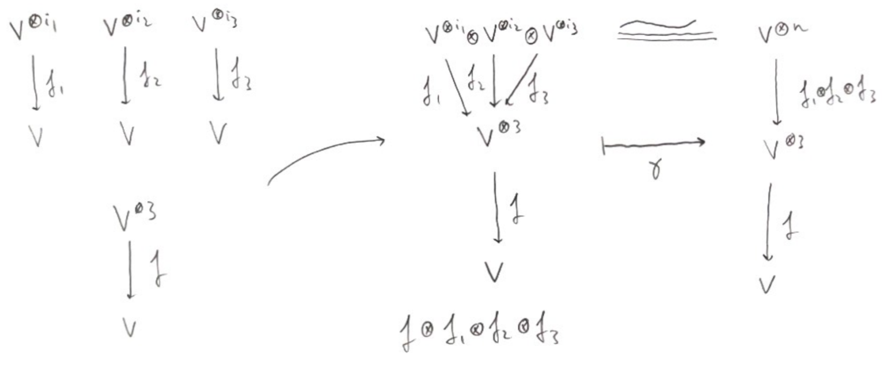


FIGURE 3.3 – La composition dans l'opérade des endomorphismes d'un espace vectoriel V.

Une opérade non-symétrique unitaire (resp. non-unitaire) $\mathscr{P} = (0, V, 0, 0, ...)$ concentrée en arité 1 est une algèbre associative unitaire (resp. non-unitaire). En effet, la composition est réduite à une application linéaire $\gamma : \mathscr{P}(1) \otimes \mathscr{P}(1) \to \mathscr{P}(1)$ satisfaisant la relation d'associativité et l'unité à une application linéaire $\eta : \mathbb{K} \to \mathscr{P}(1)$. Réciproquement, toute algèbre associative définit une opérade concentrée en arité 1 (on retrouve la situation décrite au début du chapitre, où seuls des arbres à une entrée et une sortie sont greffés les uns aux autres). Il y a donc non seulement une inclusion de catégories Vect $\hookrightarrow$ $\mathbb{N}$-mod mais également une inclusion de catégories *monoïdales* (Vect, $\otimes, \mathbb{K}$) $\hookrightarrow$ ($\mathbb{N}$-mod, $\circ, I$) via l'arité 1.

Une opérade est donc une structure algébrique généralisant la notion d'algèbre permettant d'encoder la composition d'opérations d'arités quelconques.

∼

Si le morphisme γ peut être décomposé en une famille de morphismes $\gamma_{i_1,\dots,i_k}$, ces derniers peuvent eux-mêmes être décomposés : pourquoi en effet se restreindre à une composition qui greffe chaque fois des arbres à *toutes* les feuilles d'un arbre donné, comme dans la figure 3.2 ? N'est-il pas possible de composer seulement deux opérations à la fois ?

FIGURE 3.4 – La composition partielle de deux opérations.

Cette idée donne naissance à une deuxième définition d'opérade, à partir de compositions «partielles». Ces compositions partielles entre deux opérations sont définies comme précédemment, à l'aide de la greffe des arbres et la contraction des sommets. Afin de pouvoir dire sur quelle feuille s'effectue la greffe, les feuilles de l'arbre «de base», associé disons à l'opération μ, sont numérotées de gauche à droite, de 1 à l'arité de μ. Les compositions partielles de l'opération μ avec une autre opération ν sont notées $\mu \circ_i \nu$, en fonction de la feuille i le long de laquelle est effectuée la greffe (voir la figure 3.4).

Il ne nous reste pour obtenir (moralement) une opérade qu'à demander à ce que ces compositions partielles soient associatives (et qu'il existe une opération «unité» dans le cas unitaire). Il convient ici d'être attentif : n'ayant occupé qu'une des feuilles de notre arbre de base en effectuant une composition partielle, il y a deux cas possible pour la greffe d'un deuxième arbre : soit on le greffe sur l'arbre qui vient tout juste d'être greffé («en séquence»), soit on le greffe sur l'une des feuilles laissées libres à côté de l'arbre greffé («en parallèle»). La figure 3.5 représente les deux situations possibles.

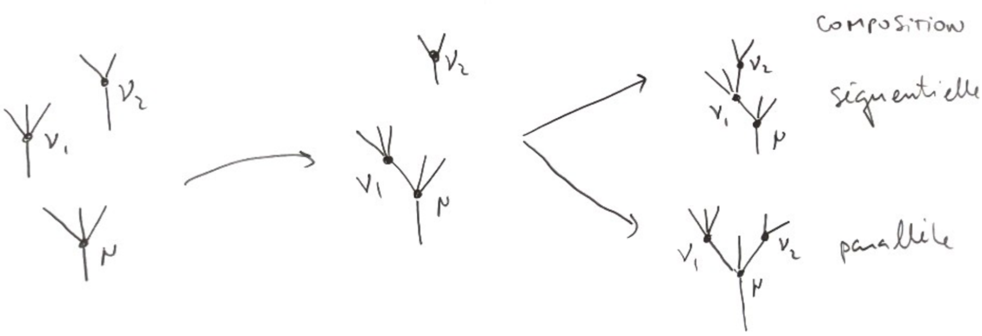


FIGURE 3.5 – Les compositions séquentielle et parallèles de trois opérations.

Définition 3.1.6. (Opérade algébrique, définition partielle) Une *opérade non-symétrique non-unitaire* est un $\mathbb{N}$-module $\mathscr{P}$ muni pour chaque m d'une famille d'applications linéaires

$$-\circ_i - : \mathscr{P}(m)\otimes\mathscr{P}(n)\to\mathscr{P}(m-1+n)$$

$1\leqslant i\leqslant m$ dites «compositions partielles» satisfant pour tous $\lambda\in\mathscr{P}(l),\mu\in\mathscr{P}(m),\nu\in\mathscr{P}(n)$

1) «Composition séquentielle» : pour tous $1\leqslant i\leqslant l$, $1\leqslant j\leqslant m$,

$$\lambda\circ_i(\mu\circ_j\nu)=(\lambda\circ_i\mu)\circ_{i-1+j}\nu$$

2) «Composition parallèle» : pour tous $1\leqslant i<k\leqslant l$,

$$(\lambda\circ_k\nu)\circ_i\mu=(\lambda\circ_i\mu)\circ_{k-1+m}\nu$$

Si de plus il existe un élément id$\in\mathscr{P}(1)$ tel que

$$\begin{aligned}\mathrm{id}\circ_1\nu&=\nu\\ \mu\circ_i\mathrm{id}&=\mu\end{aligned}$$

on la dit *opérade non-symétrique unitaire*.

Les deux définitions d'opérade ainsi obtenues sont-elles équivalentes ? Oui, mais seulement dans le cas unitaire.

Proposition 3.1.7. *Dans le cas unitaire, les définitions classique et partielle d'une opérade sont équivalentes.*

Démonstration. Dans un sens

$$\mu\circ_i\nu:=\gamma(\mu;\mathrm{id},...,\mathrm{id},\nu,\mathrm{id},...,\mathrm{id})$$

Dans l'autre

$$\gamma(i_1,...,i_n):=(-\circ_1(\cdots(-\circ_{n-1}(-\circ_n-))\cdots))$$

□

REMARQUE 3.1.8. La raison pour laquelle la preuve ne fonctionne pas dans le cas non-unitaire est évidente : nous n'avons pas d'identité pour «remplir» les branches vacantes de γ. Dans ce cas, nous ne disposons que d'une seule implication : de la définition partielle vers la définition classique.

La notion de morphisme entre opérades unitaires (resp. non-unitaires) est la notion naturelle de morphisme entre deux monoïdes : une flèche de la catégorie, compatible avec les deux morphismes de structures γ et η (resp. le morphisme de structure γ).

Définition 3.1.9. Un *morphisme* entre deux opérades $(\mathscr{P},\gamma^{\mathscr{P}})$ et $(\mathscr{Q},\gamma^{\mathscr{Q}})$ est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\alpha:\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ tel que

$$\alpha\gamma^{\mathscr{P}}=\gamma^{\mathscr{Q}}(\alpha\circ\alpha)$$

et

$$\alpha\eta^{\mathscr{P}}=\eta^{\mathscr{Q}}$$

Ces relations peuvent être représentées par des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}\mathscr{P}\circ\mathscr{P} \arrow[r, "\alpha\circ\alpha"] \arrow[d, "\gamma^{\mathscr{P}}"] & \mathscr{Q}\circ\mathscr{Q} \arrow[d, "\gamma^{\mathscr{Q}}"] \\ \mathscr{P} \arrow[r, "\alpha"] & \mathscr{Q}\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\eta^{\mathscr{P}}"'] \arrow[dr, "\eta^{\mathscr{Q}}"] & \\ \mathscr{P} \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathscr{Q}\end{tikzcd}$$

Les opérades non-symétriques non-unitaires (resp. unitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée Op ou $\mathrm{Op}_{\mathbb{K}}$ (resp. uOp ou $\mathrm{uOp}_{\mathbb{K}}$).

REMARQUE 3.1.10. Une opérade est dite *augmentée* s'il existe un morphisme d'opérades $\varepsilon : \mathscr{P} \to I$. Dans ce cas elle est isomorphe en tant que $\mathbb{N}$-module à $I \oplus \ker \varepsilon$. On note $\overline{\mathscr{P}} := \ker \varepsilon$ et on le dit «idéal opéradique d'augmentation». La catégorie des opérades unitaires augmentées est équivalente à la catégorie des opérades non-unitaires ; on travaillera le plus souvent dans la suite dans la première.

~

Il est temps d'être plus précis sur ce que nous avons entendu jusqu'à présent par la notion d'arbre.

Définition 3.1.11. Un *arbre* est un graphe connexe fini qui ne contient pas de cycle. Un arbre est dit *planaire* s'il peut être dessiné sur un plan sans que deux arêtes ne se croisent. Il est dit *enraciné* s'il possède une arête externe privilégiée, nommée racine ; les autres arêtes externes étant alors nommées feuilles.

Tous les arbres que nous avons considérés jusqu'ici sont des arbres planaires enracinés. De tels arbres peuvent être orientés de manière naturelle en posant la racine vers le bas (orientation «selon la gravité»). Cette orientation induit pour tout sommet un unique chemin du sommet vers la racine ; on peut dès lors parler de l'unique sortie d'un sommet (l'arête se dirigeant vers la racine) de même que de ses entrées (toutes les autres arêtes reliées à ce sommet).

Définition 3.1.12. Un arbre planaire enraciné est dit *binaire* si tous ses sommets internes ne comportent que deux entrées et une sortie.

Aux feuilles de tout arbre planaire enraciné on peut associer un ordre total en les numérotant de gauche à droite de 1 à n. S'il n'a pas de sommets sans entrée (i.e. si l'arbre est de plus *réduit*) cet ordre induit une numérotation des sommets situés entre les feuilles.

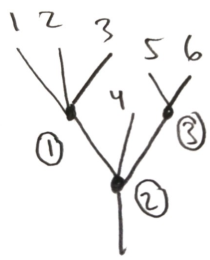


FIGURE 3.6 – Un arbre planaire enraciné à 6 feuilles et 3 sommets internes.

Deux catégories d'arbres nous seront utiles dans la suite : la catégorie des arbres planaires enracinés à n feuilles notée PT_n de même que la catégorie des arbres binaires planaires enracinés à n feuilles notée PBT_n, qui est une sous-catégorie de la première. Les morphismes dans ces catégories sont donnés par les homomorphismes de graphes. Dans la suite, tout arbre sera supposé planaire et enraciné.

Il est également temps d'être plus précis sur ce que nous avons entendu jusqu'à présent par la notion de greffe d'arbres.

Définition 3.1.13. La greffe d'un arbre s à n feuilles sur un arbre t à m feuilles le long de la feuille i est obtenue en identifiant la racine de s à la feuille i de l'arbre t. L'arbre à $m-1+n$ feuilles obtenu suite à cette greffe est noté $t \circ_i s$.

REMARQUE 3.1.14. Attention : bien que la greffe des arbres soit notée $\circ_i$, *elle n'implique pas la contraction des sommets*, contrairement aux compositions partielles $\circ_i$ dans une opérade. L'arbre obtenu suite à une greffe possède strictement plus de sommets et de feuilles que l'arbre sur lequel cette greffe est effectuée (voir les arbres dessinés à droite dans la figure 3.5). En fait, le nombre de sommets internes de la greffe de deux arbres $t \circ_i s$ est égal à la *somme* du nombre de sommets internes de t et du nombre de sommets internes de s.

La greffe de trois arbres peut, à l'instar des compositions partielles dans une opérade, être effectuée de manière parallèle ou séquentielle. Elle est, du strict point de vue des graphes, associative : que l'on greffe les deux premiers arbres, puis le troisième, ou que l'on commence par greffer les deux derniers arbres, puis le premier, nous obtenons le même arbre. De manière précise, les greffes $\circ_i$ vérifient pour tout triplet d'arbres $\lambda \in \mathrm{PT}_l$, $\mu \in \mathrm{PT}_m$ et $\nu \in \mathrm{PT}_n$ les relations suivantes.

$$\begin{array}{rcll} \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu) & = & (\lambda \circ_i \mu) \circ_{i-1+j} \nu & \forall 1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant j \leqslant m \\ (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu & = & (\lambda \circ_i \mu) \circ_{k-1+m} \nu & \forall 1 \leqslant i < k \leqslant l \end{array}$$

Deux exemples sont donnés à la figure 3.7 dans le cas particulier où les trois arbres considérés sont des corolles, c'est-à-dire ne possèdent qu'un seul sommet interne.

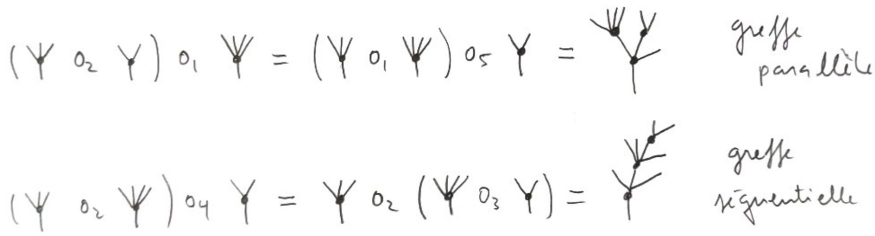


FIGURE 3.7 – Greffes parallèle et séquentielle de trois arbres planaires enracinés.

Considérons un arbre réduit τ (cette hypothèse nous permet d'éviter les problèmes d'ordre sur les sommets) et l'un de ses sommets $s \in S(\tau)$. Notons l'ensemble des entrées de l'arbre s par ent(s) et son cardinal par $|\mathrm{ent}(s)|$. Considérons maintenant un $\mathbb{N}$-module M. Définissons son *module arboré* par la formule suivante.

$$\tau(M) := \bigotimes_{s \in S(\tau)} M(|\mathrm{ent}(s)|)$$

Un vecteur du module arboré $\tau(M)$ est une décoration des sommets de l'arbre τ par des opérations de M dont l'arité correspond au nombre d'entrées de chaque sommet. Le module arboré est tout simplement l'ensemble des telles décorations. Considérons par exemple un arbre τ à 6 feuilles et trois sommets internes décorés par des éléments de M, tel que représenté sur la figure 3.8. Ici, m est un élément de $M(2)$, alors que m' et m'' sont des éléments de $M(3)$. En tant qu'élément du module arboré, nous le noterons $\tau \otimes m \otimes m' \otimes m''$. Nous noterons aussi parfois cet élément du module arboré par $\tau \otimes mm'm''$ ou encore $\tau \otimes \underline{m}$ pour abréger.

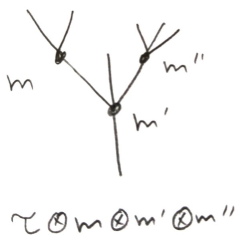


FIGURE 3.8 – Un arbre décoré par des éléments

Définition 3.1.15. Le *module des arbres* sur un $\mathbb{N}$-module M est défini comme la somme directe des modules arborés sur tous les arbres planaires enracinés.

$$\mathbb{T}(M) := \bigoplus_{\tau} \tau(M)$$

L'espace vectoriel des opérations d'arité n du module des arbres $\mathbb{T}(M)(n)$ est constitué des arbres à n feuilles.

Par analogie avec le module tensoriel, introduisons une graduation sur le module des arbres dépendant du *poids* d'un arbre, soit son nombre de sommets internes. La composante de poids n du module des arbres s'écrit

$$\mathbb{T}(M)^{(n)} := \bigoplus_{\tau \text{ à } n \text{ sommets internes}} \tau(M).$$

Le module des arbres s'écrit

$$\mathbb{T}(M) := \bigoplus_{n} \mathbb{T}(M)^{(n)}.$$

Remarquons qu'en tant que $\mathbb{N}$-modules les composantes de poids 0 et 1 du module des arbres $\mathbb{T}(M)^{(0)}$ et $\mathbb{T}(M)^{(1)}$ sont isomorphes à I et à M, respectivement. Le premier isomorphisme découle du fait qu'il n'y a qu'un seul arbre à 0 sommet et de la convention $M^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Le deuxième découle du fait qu'il n'y a pour un n donné qu'un seul arbre à n feuilles et 1 sommet interne : la corolle. Décorer ce sommet revient tout simplement à choisir un élément de $M(n)$.

Définition 3.1.16. Le *produit tensoriel* de deux $\mathbb{N}$-modules M et N est défini en arité n par la formule suivante.

$$(M \otimes N)(n) := \bigoplus_{i+j=n} M(i) \otimes N(j)$$

Définition-Proposition 3.1.17. *L'opérade des arbres sur un $\mathbb{N}$-module M est obtenue en munissant le module des arbres*

$$\mathbb{T}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{T}(M)^{(n)}$$

des compositions partielles $- \circ_i - : \mathbb{T}(M)^{(k)} \otimes \mathbb{T}(M)^{(l)} \to \mathbb{T}(M)^{(k+l)}$ *définies par*

$$(\tau \otimes m_1 \cdots m_k) \circ_i (\tau' \otimes \underline{m}_{k+1} \cdots m_l) := (\tau \circ_i \tau') \otimes m_1 \cdots m_k m_{k+1} \cdots m_l$$

où le $\circ_i$ à droite est la greffe des arbres. La décoration de la composition des deux arbres τ et τ' est directement donnée par leurs décorations individuelles.

Démonstration. Tout d'abord, les compositions partielles définies ici sont bien des compositions partielles au sens des opérades : si l'arbre τ appartient à PT_m et l'arbre τ' à PT_n, alors leur composition partielle appartient bien à PT_{m+n-1}. Le fait que la greffe des arbres vérifie les axiomes de d'associativité séquentielle et parallèle implique immédiatement que les compositions partielles les satisfont également. L'unique arbre à un sommet et 0 entrée $\iota \in \mathbb{T}(M)(1)$ est une unité pour les compositions partielles. □

L'opérade des arbres réduite est obtenue par le même procédé à partir de du module des arbres réduit

$$\overline{\mathbb{T}}(M) = \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathbb{T}(M)^{(n)}$$

Il s'agit toujours d'une opérade mais elle n'est plus unitaire. L'opérade des arbres est munie de l'injection $i : M \cong \mathbb{T}(M)^{(1)} \hookrightarrow \mathbb{T}(M)$ qui est l'inclusion de M dans $\mathbb{T}(M)$ via l'arité 1.

REMARQUE 3.1.18. L'opérade des arbres est augmentée par la projection $\varepsilon : \mathbb{T}(M) \to I$ qui envoie $\mathbb{T}(M)^{(0)} \cong I$ sur lui-même et $\mathbb{T}(M)^{(n)}$ sur 0 pour tout $n \geqslant 1$. Son idéal opéradique d'augmentation est $\overline{\mathbb{T}}(M)$.

REMARQUE 3.1.19. Pour définir un morphisme de $\mathbb{N}$-module ayant comme source $\mathbb{T}(M)$, il suffit de le définir sur chacune des composantes de poids n.

Définition 3.1.20. L'*opérade libre* sur un $\mathbb{N}$-module M est une opérade $\mathscr{F}(M)$ munie d'un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\eta(M) : M \to \mathscr{F}(M)$ possédant la propriété universelle suivante : pour toute opérade $\mathscr{P}$ et tout morphisme de $\mathbb{N}$-modules $f : M \to \mathscr{P}$, il existe un unique morphisme d'opérades $\tilde{f} : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{P}$ tel que $\tilde{f} \circ \eta(M) = f$. On peut représenter cette propriété par le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta(M)"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{F}(M) \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{f}"] \\ & \mathscr{P} \end{tikzcd}$$

De manière équivalente, le foncteur $\mathscr{F} : \mathbb{N} - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Op}_{\mathbb{K}}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli qui à une opérade associe son $\mathbb{N}$-module sous-jacent. L'opérade libre sur M est unique à isomorphisme canonique près.

Proposition 3.1.21. *L'opérade des arbres munie de l'injection est libre dans la catégorie des opérades.*

Démonstration. Soit M une opérade unitaire, $f : M \to \mathscr{P}$ un morphisme de $\mathbb{N}$-modules.

Unicité. Supposons qu'il existe un morphisme d'opérades $\tilde{f} : \mathbb{T}(M) \to \mathscr{P}$ tel que $\tilde{f} \circ i = f$. Alors il vérifie immédiatement pour tout élément $\tau \otimes m \in \mathbb{T}(M)^{(1)}$ les deux conditions suivantes.

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(0)}(1) &= \mathrm{id} && \text{par unitarité} \\ \tilde{f}^{(1)}(\tau \otimes m) &= f(m) && \text{par compatibilité avec } f \end{aligned} \tag{3.1}$$

De plus, il doit faire commuter pour tout n et tout couple p,q tel que $p+q=n$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}(M)^{(p)} \otimes \mathbb{T}(M)^{(q)} \arrow[r, "i^{(p)} \circ i^{(q)}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbb{T}(M) \circ \mathbb{T}(M) \arrow[r, "\tilde{f} \circ \tilde{f}"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{P} \circ \mathscr{P} \arrow[d, "\gamma^{\mathscr{P}}"] \\ \mathbb{T}(M)^{(n)} \arrow[r, "i^{(n)}"] & \mathbb{T}(M) \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathscr{P} \end{tikzcd}$$

Nous montrons par induction sur le poids $n = p+q$ que cette condition détermine $\tilde{f}$ de manière unique. Il suffit de considérer les cas où $pq \neq 0$, les autres étant déterminés par (3.1). Examinons d'abord le cas $n=2$ où $p=q=1$. Pour $(\tau \otimes m) \otimes (\tau', m') \in M \otimes M$, il faut que

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(2)}((\tau \circ_i \tau') \otimes mm') &= \tilde{f}\gamma(i^{(1)} \circ i^{(1)})((\tau \otimes m) \otimes (\tau' \otimes m')) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(\tilde{f}^{(1)} \circ \tilde{f}^{(1)})((\tau \otimes m) \otimes (\tau', m')) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(\tilde{f}^{(1)}(\tau \otimes m) \otimes \tilde{f}^{(1)}(\tau' \otimes m')) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(f(m) \otimes f(m')) \end{aligned}$$

Supposons maintenant, en nous servant de l'associativité de la composition de $\mathscr{P}$, que pour tout $k \leqslant n-1$, $p+q=k$ et $pq \neq 0$,

$$\tilde{f}^{(k)}(\tau \otimes m_1 \cdots m_k) = \gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_k))$$

Alors, pour $p = n-1$ et $q = 1$, $(\tau \otimes m_1 \cdots m_{n-1}) \otimes (\tau' \otimes m_n) \in \mathbb{T}(M)^{(n-1)} \otimes \mathbb{T}(M)^{(1)}$ il faut que

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(n)}((\tau \circ_i \tau') \otimes m_1 \cdots m_n) &= \tilde{f}\gamma(i^{(n-1)} \circ i^{(1)})((\tau \otimes m_1 \cdots m_{n-1}) \otimes (\tau' \otimes m_n)) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(\tilde{f}^{(n-1)} \circ \tilde{f}^{(1)})((\tau \otimes m_1 \cdots m_{n-1}) \otimes (\tau' \otimes m_n)) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(\tilde{f}^{(n-1)}(\tau \otimes m_1 \cdots m_{n-1}) \otimes \tilde{f}^{(1)}(\tau' \otimes m_n)) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(\gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_{n-1})) \otimes f(m_n)) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_n)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{f} = \bigoplus \tilde{f}^{(n)}$ est unique : il est entièrement déterminé par f et la condition d'être un morphisme d'opérades unitaires.

Existence. Maintenant, si pour un élément $\tau \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \in \mathbb{T}(M)^{(n)}$ on définit un certain $\tilde{f}$ par les formules

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &:= \mathrm{id} \\ \tilde{f}^{(n)}(\tau \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &:= \gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_n)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

on obtient un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\tilde{f}$ qui est également un morphisme d'opérades. En effet, pour tout couple p,q tel que $p+q=n$ et $pq \neq 0$ nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \tilde{f}\gamma(i^{(p)} \circ i^{(q)})((\tau \otimes m_1 \cdots m_p)) \otimes (\tau' \otimes m_{p+1} \cdots m_{p+q}))) &= \tilde{f}^{(n)}((\tau \circ_i \tau') \otimes m_1 \cdots m_n) \\ &= \gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_n)) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} & \gamma^{\mathscr{P}}(\tilde{f}^{(p)} \circ \tilde{f}^{(q)})((\tau \otimes m_1 \cdots m_p)) \otimes (\tau' \otimes m_{p+1} \cdots m_{p+q})) \\ = \; & \gamma^{\mathscr{P}}(\tilde{f}^{(p)}(\tau \otimes m_1 \cdots m_p) \otimes \tilde{f}^{(q)}(\tau' \otimes m_{p+1} \cdots m_{p+q})) \\ = \; & \gamma^{\mathscr{P}}()\gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_p)) \otimes \gamma^{\mathscr{P}}(f(m_{p+1}) \otimes \cdots \otimes f(m_{p+q}))) \\ = \; & \gamma^{\mathscr{P}}(f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_n)) \end{aligned}$$

par associativité de $\gamma^{\mathscr{P}}$. De plus, nous avons par définition $\tilde{f} \circ i = f$, ce qui termine la démonstration.

Il suffit de remplacer $\mathbb{T}(M)$ par $\overline{\mathbb{T}}(M)$ et de retirer (3.1) et (3.2) pour obtenir la démonstration dans le cas non-unitaire. □

Dorénavant, il ne sera plus nécessaire de distinguer $\mathscr{F}(M)$ de $\mathbb{T}(M)$ -resp. $\overline{\mathscr{F}}(M)$ de $\overline{\mathbb{T}}(M)$.

REMARQUE 3.1.22. En prenant une opérade $\mathscr{P} = (0, \mathscr{P}(1), 0, 0, \ldots)$ concentrée en arité 1 on retrouve la preuve de la liberté de l'algèbre tensorielle (proposition 2.1.10).

3.2 Algèbre sur une opérade

Nous avons vu que la notion d'opérade généralise celle d'algèbre associative. Or, elle permet également *d'encoder la structure* d'une algèbre associative.

Tout espace vectoriel $A \in$ Vect peut être vu comme un $\mathbb{N}$-module concentré en arité 0, $A = (A, 0, 0, \ldots)$. Pour toute opérade $\mathscr{P}$, il est dès lors possible de parler, en ne considérant que les structures de $\mathbb{N}$-modules, du produit de composition $\mathscr{P} \circ A$. Comme nous l'apprend une rapide inspection de la définition, ce $\mathbb{N}$-module est concentré en arité 0 :

$$\mathscr{P} \circ A(n) = \begin{cases} \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathscr{P}(k) \otimes A^{\otimes k} & n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 3.2.1. Une *algèbre sur une opérade* $\mathscr{P}$ (ou plus succintement $\mathscr{P}$*-algèbre*) est un espace vectoriel A muni d'un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\gamma_A : \mathscr{P} \circ A \to A$ faisant commuter les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{P} \circ \mathscr{P}) \circ A \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma_A \circ \mathrm{id}"'] & \mathscr{P} \circ (\mathscr{P} \circ A) \arrow[r, "\mathrm{id} \circ \gamma_A"] & \mathscr{P} \circ A \arrow[d, "\gamma_A"] \\ \mathscr{P} \circ A \arrow[rr, "\gamma_A"] & & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \circ A \arrow[r, "\eta \circ \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathscr{P} \circ A \arrow[d, "\gamma_A"] & A \circ I \arrow[l, "\mathrm{id}_A \circ \eta"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

REMARQUE 3.2.2. A et $\mathscr{P} \circ A$ étant concentrés en degré 0, γ_A n'est autre qu'une application linéaire entre espaces vectoriels (éventuellement gradués).

Définition 3.2.3. Un *morphisme* entre les $\mathscr{P}$-algèbres A et A' est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules (application linéaire) $f : A \to A'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P} \circ A \arrow[r, "\mathscr{P} \circ f"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & \mathscr{P} \circ A' \arrow[d, "\gamma_{A'}"] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$

Les $\mathscr{P}$-algèbres sur Vect munies de leurs morphismes forment une catégorie notée $\mathscr{P}$-alg.

Proposition 3.2.4. *La donnée d'une structure de $\mathscr{P}$-algèbre sur A est équivalente à la donnée d'un morphisme d'opérades $\mathscr{P} \to End_A$.*

Démonstration. Soit A une $\mathscr{P}$-algèbre. Définissons un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\phi : \mathscr{P} \to \mathrm{End}_A$ par les

$$\begin{array}{rcl} \phi_n : \mathscr{P}(n) & \to & \mathrm{Vect}(A^{\otimes n}, A) \\ \mu & \mapsto & \gamma_A(\mu; -, \ldots, -) \end{array}$$

Vérifier que ϕ est un morphisme d'opérades est direct. À l'inverse, soit $\phi : \mathscr{P} \to \mathrm{End}_A$ un morphisme d'opérades. On définit un morphisme $\gamma_A : \mathscr{P} \circ A \to A$ par les

$$\begin{array}{rcl} \gamma_A^{(n)} : \mathscr{P}(n) \otimes A^{\otimes n} & \to & A \\ (\mu; a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \phi(\mu)(a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

La commutativité des deux diagrammes se vérifie directement. □

EXEMPLES. (**les opérades As et uAs**) Considérons les deux $\mathbb{N}$-modules

$$\begin{aligned} As &:= (0, \mathbb{K}\mu_1, \mathbb{K}\mu_2, \mathbb{K}\mu_3, ...) \\ uAs &:= (\mathbb{K}, \mathbb{K}\mu_1, \mathbb{K}\mu_2, \mathbb{K}\mu_3, ...) \end{aligned}$$

où chaque arité est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par un générateur. Munissons-les d'une structure d'opérade. Définissons la composition

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{i_1,\dots,i_k} : As(k) \otimes As(i_1) \otimes \cdots \otimes A(i_k) & \to & As(i_1 + \cdots + i_k) \\ \mu_k \otimes \mu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{i_k} & \mapsto & \mu_{i_1+\cdots+i_k} \end{array}$$

à l'aide de l'identification $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \cdots \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$. Une As-algèbre (resp. uAs-algèbre) est un espace vectoriel A muni pour tout entier naturel n d'une opération μ_n d'arité n définie par la formule suivante.

$$\begin{array}{rcl} \mu_n \quad : A^{\otimes n} & \to & A \\ a_1 \cdots a_n & \mapsto & a_1 ... a_n \end{array}$$

En d'autres mots, il s'agit d'une algèbre associative (resp. unitaire).

Pour toute opérade $\mathscr{P}$, il est possible de parler de l'algèbre libre dans la catégorie des $\mathscr{P}$-algèbres. Il est ainsi possible de retrouver de manière conceptuelle la construction de l'algèbre associative libre.

Définition 3.2.5. Une $\mathscr{P}$-algèbre *libre* sur un espace vectoriel V est une $\mathscr{P}$-algèbre $\mathscr{L}_{\mathscr{P}}(V)$ munie d'une application linéaire $\eta : V \to \mathscr{L}_{\mathscr{P}}(V)$ possédant la propriété universelle suivante : pour toute $\mathscr{P}$-algèbre A et tout application linéaire $f : V \to A$ il existe un unique morphisme de $\mathscr{P}$-algèbres $\tilde{f} : \mathscr{L}_{\mathscr{P}}(V) \to A$ tel que $\tilde{f}\eta = f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{L}_{\mathscr{P}}(V) \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposition 3.2.6. *La $\mathscr{P}$-algèbre $(\mathscr{P} \circ V, \gamma_V)$ munie de l'injection $\eta : V \to \mathscr{P} \circ V$ est libre dans la catégorie des $\mathscr{P}$-algèbres.*

Démonstration. La preuve est purement formelle, voir [LV12], p.134. □

EXEMPLES. L'algèbre libre sur un espace vectoriel V dans la catégorie des uAs-algèbres (resp. As-algèbres) n'est autre que l'algèbre tensorielle

$$\mathscr{L}_{uAs}(V) = T(V)$$

(resp. l'algèbre tensorielle réduite $\mathscr{L}_{As}(V) = \overline{T}(V)$).

3.3 Opérades symétriques

Si les opérades permettent d'encoder la structure d'algèbre associative, qu'en est-il de la notion d'algèbre *commutative* ? Cette idée de pouvoir permuter les éléments nous pousse à introduire la définition d'opérade *symétrique*. À cette fin, il faut reprendre la définition d'opérade non-symétrique et introduire «partout» l'action du groupe symétrique à n éléments S_n. Ainsi, la définition $\mathbb{N}$-module est remplacée par celle de $\mathbb{S}$-module.

Définition 3.3.1. Un *S-module M* est une famille $\{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[S_n]$-modules indicée par les naturels, c'est-à-dire un ensemble de représentations du groupe symétrique (un choix de représentation du groupe S_n pour chaque n).

La notion de morphisme entre $\mathbb{N}$-modules est remplacée par une notion de morphisme respectant l'action du groupe symétrique.

Définition 3.3.2. Un *morphisme* entre deux S-modules M et N est une famille d'applications linéaires $f_n : M(n) \to N(n)$ qui sont S_n-équivariantes, c'est-à-dire telles que $f_n(\sigma m) = \sigma f_n(m)$ pour tous $\sigma \in S_n, m \in M_n$.

Le produit de composition de deux $\mathbb{S}$-modules est défini à l'aide des représentations induites du groupe symétrique.

Définition 3.3.3. Le *produit de composition* de deux $\mathbb{S}$-modules est défini en arité n par la formule

$$(M \circ N)(n) := \bigoplus_{k \geqslant 0} M(k) \otimes_{S_k} \left[\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{S_{i_1}\times\cdots\times S_{i_n}}^{S_n} (N(i_1) \otimes \cdots \otimes N(i_k)) \right]$$

où la notation $\otimes_{S_k}$ signifie que le produit tensoriel est effectué sur l'anneau $\mathbb{K}[S_n]$.

La catégorie des $\mathbb{S}$-modules munie de ce produit de composition et du $\mathbb{S}$-module identité $I = (0, \mathbb{K}, 0, 0, ...)$ (sur lequel l'action de S_n est triviale) forme une catégorie monoïdale symétrique. Une opérade *symétrique* est un monoïde dans cette catégorie.

Toutes les notions opéradiques des sections précédentes et suivantes s'étendent au cas symétrique. Un nombre important de modifications parfois subtiles sont nécessaires à ce passage, car le monde des opérades symétriques est très riche. Nous nous bornerons ici à exposer trois exemples fondamentaux d'opérades symétriques, appelées «les trois grâces» par Jean-Louis Loday.

EXEMPLES. (**Les trois grâces**) Le $\mathbb{S}$-module $Ass := (0, \mathbb{K}[S_1], \mathbb{K}[S_2], ...)$ où $\mathbb{K}[S_n]$ est la représentation régulière de S_n peut être muni d'une structure d'opérade à l'aide de la «composition des polynômes non-commutatifs». Une *Ass*-algèbre est une algèbre associative non-unitaire, et la *Ass*-algèbre libre sur un espace vectoriel V est l'algèbre tensorielle réduite $\overline{T}(V)$.

Le $\mathbb{S}$-module $Com := (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}, ...)$ où l'action S_n sur $\mathbb{K}$ est triviale peut être muni d'une structure d'opérade à l'aide de la «composition des polynômes». Une *Com*-algèbre est une algèbre commutative non-unitaire, et la *Com*-algèbre libre sur un espace vectoriel V est l'algèbre symétrique réduite $\overline{S}(V)$.

Le $\mathbb{S}$-module *Lie* est défini en arité n par la composante multilinéaire de degré n de l'algèbre de Lie libre $Lie(\mathbb{K}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}x_n)$. Il est possible de montrer que la structure d'opérade sur l'opérade symétrique *Ass* induit une structure d'opérade symétrique sur le $\mathbb{S}$-module *Lie*. Une algèbre sur l'opérade *Lie* est une algèbre de Lie.

3.4 Coopérades algébriques, coopérade colibre

Au même titre que la notion d'algèbre associative, la notion d'opérade peut être dualisée. Alors qu'une opérade encode la composition des opérations, qu'il est possible de représenter par la greffe des arbres, une coopérade encode la décomposition des opérations, qu'il est possible de se représenter par leur éclatement.

Définition 3.4.1. Une *coopérade non-symétrique non-counitaire* est un $\mathbb{N}$-module $\mathscr{C}$ muni d'un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \circ \mathscr{C}$ appelée «décomposition» tel que

$$(\Delta \circ \mathrm{id}_{\mathscr{C}})\Delta = (\mathrm{id}_{\mathscr{C}} \circ \Delta)\Delta$$

S'il existe de plus un morphisme $\varepsilon : \mathscr{C} \to I$ appelé «counité» tel que

$$(\varepsilon \circ \mathrm{id}_{\mathscr{C}})\Delta = (\mathrm{id}_{\mathscr{C}} \circ \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}_{\mathscr{C}\circ\mathscr{C}}$$

on la dit *coopérade non-symétrique counitaire*. Les relations précédentes sont plus aisément représentées par les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathscr{C} \circ \mathscr{C} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\circ\Delta"] \\ \mathscr{C} \circ \mathscr{C} \arrow[r, "\Delta\circ\mathrm{id}_{\mathscr{C}}"] & \mathscr{C} \circ \mathscr{C} \circ \mathscr{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathscr{C}}"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathscr{C}}"] & \\ \mathscr{C} \circ I & \mathscr{C} \circ \mathscr{C} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\circ\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon\circ\mathrm{id}_{\mathscr{C}}"] & I \circ \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Les éléments $\mu, \nu, ... \in \mathscr{C}(m)$ sont appelés *coopérations d'arité m*. Dans la suite, «coopérade» désignera le plus souvent «coopérade non-symétrique counitaire» ; des précisions seront ajoutées lorsque nécessaire.

REMARQUE 3.4.2. La donnée du morpshime Δ est équivalente à la donnée pour tout n et toute famille $i_1,...,i_k$ telle que $i_1+\cdots i_k=n$ d'une famille d'applications linéaires

$$\begin{array}{rcl}\Delta_{i_1,\dots,i_k}:\mathscr{C}(n) & \to & \mathscr{C}(k)\otimes\mathscr{C}(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(i_k)\\ \lambda & \mapsto & \mu\otimes\nu_1\otimes\cdots\otimes\nu_k\end{array}$$

EXEMPLES. Le $\mathbb{N}$-module unité $I=(0,\mathbb{K},0,0,...)$ est une coopérade non-symétrique counitaire pour la décomposition définie par $\Delta(\mathrm{id}):=\mathrm{id}\circ\mathrm{id}$ et la counité $\varepsilon:=\mathrm{id}_I$. Toute cogèbre coassociative counitaire (resp. non-counitaire) est une coopérade non-symétrique counitaire (resp. non-counitaire) concentrée en arité 1. Réciproquement, toute coopérade concentrée en arité 1 est une cogèbre coassociative.

Définition 3.4.3. Un *morphisme* entre deux coopérades non-symétriques non-counitaires $(\mathscr{C},\Delta_{\mathscr{C}})$ et $(\mathscr{D},\Delta_{\mathscr{D}})$ est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\alpha:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ tel que

$$(\alpha\circ\alpha)\Delta_{\mathscr{C}}=\Delta_{\mathscr{D}}\alpha$$

Dans le cas counitaire on demande également que

$$\varepsilon_{\mathscr{D}}\alpha=\varepsilon_{\mathscr{C}}$$

Ces relations peuvent être représentées par des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}\mathscr{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{C}}"] & \mathscr{D} \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{D}}"] \\ \mathscr{C}\circ\mathscr{C} \arrow[r, "\alpha\circ\alpha"] & \mathscr{D}\circ\mathscr{D}\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}\mathscr{C} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\mathscr{C}}"'] & & \mathscr{D} \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathscr{D}}"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Les coopérades non-symétriques non-counitaires (resp. counitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée CoOp (resp. uCoOp).

REMARQUE 3.4.4. Une coopérade est dite *coaugmentée* s'il existe un morphisme de coopérades $\eta:I\to\mathscr{C}$. Dans ce cas η détermine une *coopération identité* $\mathrm{id}:=\eta(1)\in\mathscr{C}(1)$, et $\mathscr{C}$ est isomorphe en tant que $\mathbb{N}$-module à $I\oplus\mathrm{coker}\eta$. On note $\overline{\mathscr{C}}:=\mathrm{coker}\eta$ et on le dit «idéal opéradique de coaugmentation».

À une coopérade non-symétrique counitaire coaugmentée $\mathscr{C}$ on peut associer une décomposition *réduite* $\overline{\Delta}:\overline{\mathscr{C}}\to\overline{\mathscr{C}}\circ\overline{\mathscr{C}}$ définie par la formule $\overline{\Delta}(\mu):=\Delta(\mu)-(\mu;\mathrm{id}^{\otimes n})-(\mathrm{id};\mu)$.

Cette fois, définir la conilpotence est plus subtil, du fait de la non-linéarité à droite du bifoncteur $-\circ-$. On définit d'abord

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\Delta}:\overline{\mathscr{C}} & \to & \overline{\mathscr{C}}\circ\overline{\mathscr{C}}\\ \mathrm{id} & \mapsto & \mathrm{id}\circ\mathrm{id}\\ \mu & \mapsto & \overline{\Delta}(\mu)+(\mu;\mathrm{id}^{\otimes n})\end{array}$$

qu'on peut itérer en définissant $\tilde{\Delta}^0:=\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, $\tilde{\Delta}^1:=\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}^n:=(\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\circ\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}^{n-1}$. Composer $(\mathrm{Id}\circ\eta)\tilde{\Delta}^{n-1}$ revient à ajouter un niveau d'identités aux arbres produits par $\tilde{\Delta}^{n-1}$. Ainsi,

$$\hat{\Delta}^n:=\tilde{\Delta}^n-(\mathrm{Id}\circ\eta)\tilde{\Delta}^{n-1}$$

contient seulement les nouveaux arbres élevés d'un cran. On définit maintenant la *filtration coradicale* de $\mathscr{C}$ par les formules

$$\begin{array}{rcl}F_0\mathscr{C} & := & I\\ F_r\mathscr{C} & := & \ker\hat{\Delta}^r\end{array}$$

pour $r\geqslant 1$. Cette filtration est dite *exhaustive* si $\mathscr{C}=\mathrm{colim}F_r\mathscr{C}$.

Définition 3.4.5. Une coopérade non-symétrique $\mathscr{C}$ est dite *conilpotente* si elle est coaugmentée et si sa filtration coradicale est exhaustive.

REMARQUE 3.4.6. Dans ce cas tout élément $x \in \overline{\mathscr{C}}$ est *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\hat{\Delta}^m(x) = 0$ pour tout $m \geqslant n$.

Définition 3.4.7. La *coopérade des arbres* sur un $\mathbb{N}$-module M est obtenue en munissant le module des arbres

$$\mathbb{T}^c(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{T}(M)^{(n)}$$

de la décomposition $\Delta : \mathbb{T}^c(M) \to \mathbb{T}^c(M) \circ \mathbb{T}^c(M)$ donnée par l'éclatement des arbres. La coopérade des arbres *réduite* sur M est obtenue par le même procédé à partir de du module des arbres réduit.

$$\overline{\mathbb{T}^c}(M) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}(M)^{(n)}$$

Il s'agit toujours d'une coopérade mais elle n'est plus counitaire. La coopérade des arbres est munie de la *projection* $p : \mathbb{T}^c(M) \to M$ définie par l'identité sur $M \cong \mathbb{T}(M)^{(1)}$ et 0 sinon.

REMARQUE 3.4.8. La cogèbre tensorielle est coaugmentée par l'inclusion $\eta : I \to \mathbb{T}^c(M)$. Son idéal de coaugmentation est $\overline{\mathbb{T}^c}(M)$. La dualité entre opérade des arbres et coopérade des arbres est ici évidente : l'unité de $\mathbb{T}(M)$ est la coaugmentation de $\mathbb{T}^c(M)$ et l'augmentation de $\mathbb{T}(M)$ est la counité de $\mathbb{T}^c(M)$. La filtration coradicale donnée par $F_r\mathbb{T}^c(M) = \bigoplus_{n \leqslant r} \mathbb{T}(M)^{(n)}$ étant exhaustive elle fait de $\mathbb{T}^c(M)$ une coopérade non-symétrique conilpotente.

REMARQUE 3.4.9. Pour définir un morphisme de $\mathbb{N}$-modules dont le but est $\mathbb{T}^c(M)$, il suffit de la définir sur chacune des composantes de poids n.

REMARQUE 3.4.10. **Dualité linéaire entre opérades et coopérades** Soit $\mathscr{P}$ une opérade et notons $\mathscr{P}(n)^* := \mathrm{Vect}(\mathscr{P}(n), \mathbb{K})$ le dual linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{P}(n)$. L'application linéaire canonique

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathscr{P}(m)^* \otimes \mathscr{P}(n)^* & \to & (\mathscr{P}(m) \otimes \mathscr{P}(n))^* \\ f \otimes g & \mapsto & [x \otimes y \mapsto f(x)g(y)] \end{array}$$

est un isomorphisme si $\mathscr{P}(m)$ et $\mathscr{P}(n)$ sont de dimension finie. Si $\mathscr{C}$ est une coopérade counitaire, alors $\mathscr{P}(n) := \mathscr{C}(n)^*$ munie de Δ^* et ε^* est une opérade unitaire. Réciproquement, si $\mathscr{P}$ est une opérade *telle que chacun des $\mathscr{P}(n)$ est de dimension finie, $\mathscr{P}(0) = 0$ et $\gamma^{-1}(\mu)$ est fini pour tout μ*, alors $\mathscr{C} := \mathscr{P}^*$ est une coopérade. Autrement dit, des hypothèses de finitude sont nécessaires pour passer dans un sens, soit d'opérade à coopérade.

Définition 3.4.11. La *coopérade colibre* sur un $\mathbb{N}$-module M est une coopérade conilpotente [1] $\mathscr{F}^c(M)$ munie d'un morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\varepsilon(M) : \mathscr{F}^c(M) \to M$ tel que $\varepsilon(M)(\mathrm{id}) = 0$ et possédant la propriété universelle suivante : pour toute coopérade conilpotente $\mathscr{C}$ et tout morphisme de $\mathbb{N}$-modules $\varphi : \mathscr{C} \to M$ tel que $\varphi(\mathrm{id}) = 0$, il existe un unique morphisme de coopérades $\tilde{\varphi} : \mathscr{C} \to \mathscr{F}^c(M)$ tel que $\varphi = \varepsilon(M) \circ \tilde{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathscr{F}^c(M) \arrow[r, "\varepsilon(M)"'] & M \end{tikzcd}$$

De manière équivalente le foncteur $\mathscr{F}^c : \mathbb{N} - \mathrm{mod} \to \mathrm{Coop}_{\mathbb{K}}$ est adjoint à droite du foncteur oubli qui à une coopérade associe son $\mathbb{N}$-module sous-jacent. La coopérade libre sur M est unique à isomorphisme canonique près.

Proposition 3.4.12. *La coopérade des arbres (resp. la coopérade des arbres réduite) munie de la projection est colibre dans la catégorie des coopérades counitaires conilpotentes (resp. non-counitaires).*

1. Ce point est crucial et relève d'une asymétrie fondamentale entre les opérades et les coopérades. La conilpotence est donc «attachée» à la coliberté. L'objet colibre dans la catégorie des coopérades non-nécessairement conilpotentes est très différent de celuici.

Démonstration. Cette preuve est duale à celle de la proposition 3.1.21. □

Dorénavant il ne sera plus nécessaire de distinguer $\mathscr{F}^c(M)$ de $\mathbb{T}^c(M)$ -resp. $\overline{\mathscr{F}^c}(M)$ de $\overline{\mathbb{T}^c}(M)$.

REMARQUE 3.4.13. En prenant une coopérade $\mathscr{C} = (0, \mathscr{C}(1), 0, 0, \dots)$ concentrée en arité 1 on retrouve la preuve de la coliberté de la cogèbre tensorielle (proposition 2.2.14).

REMARQUE 3.4.14. Il existe également une définition de cogèbre sur une coopérade, obtenue en dualisant celle d'algèbre sur une opérade.

3.5 Opérade graduée, coopérade graduée

Définition 3.5.1. Un $\mathbb{N}$-*module gradué* M est un $\mathbb{N}$-module dans la catégorie des espaces vectoriels gradués, i.e. consiste en une famille $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces vectoriels gradués $M(n) = \{M_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Une opération $\mu \in M_p(n)$ d'arité n est dite de *degré homologique* (ou simplement *degré*) p, ce dernier étant noté $|\mu|$. Un *morphisme* entre deux $\mathbb{N}$-modules gradués $f : M \to N$ est une famille de morphismes d'espaces vectoriels gradués $f_n : M(n) \to N(n)$ où $(f_n)_p : M_p(n) \to N_{p+r}(n)$. f est dit de degré r si tous les f_n le sont ; on note alors $|f| = r$. Les $\mathbb{N}$-modules gradués munis de leurs morphismes forment une catégorie noté g$\mathbb{N}$-mod.

EXEMPLES. Tout $\mathbb{N}$-module peut être vu comme un g$\mathbb{N}$-module concentré en degré 0. En particulier, le $\mathbb{N}$-module unité I est gradué.

Définition 3.5.2. Le *produit tensoriel* dans la catégorie des $\mathbb{N}$-modules gradués est défini par

$$(M \otimes N)_p(n) := \bigoplus_{\substack{i+j=n\\ q+r=p}} M_q(i) \otimes N_r(j).$$

Définition 3.5.3. Le *produit de composition* de deux g$\mathbb{N}$-modules et défini par

$$(M \circ N)_p(n) := \bigoplus_{\substack{k\geqslant 0\\ q+r_1+\cdots+r_k=p}} M_q(k) \otimes N^{\otimes k}(n)$$

où

$$N^{\otimes k} := \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} N_{r_1}(i_1) \otimes \cdots \otimes N_{r_k}(i_k).$$

Proposition 3.5.4. *La catégorie (g$\mathbb{N}$-mod, $\circ, I$) est monoïdale.*

L'action du bifoncteur $- \circ -$ sur les morphismes est définie de la même manière que dans $\mathbb{N}$-mod. Supposons que l'on ait deux morphismes de $\mathbb{N}$-modules gradués $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$. Leur produit de composition est défini par la formule

$$f \circ g(\mu; \nu_1, \dots, \nu_k) := (f(\mu); g(\nu_1), \dots, g(\nu_k))$$

La différence ici est que ce morphisme a un degré, et il est en fait la somme des degrés de f et g

$$|f \circ g| = |f| + |g|$$

REMARQUE 3.5.5. Considérons $M^{\otimes n}$ avec M un $\mathbb{N}$-module gradué. Par définition, l'arité p de degré k est donnée par la formule

$$(M^{\otimes n})_k(p) := \bigoplus_{\substack{r_1+\cdots+r_n=k\\ i_1+\cdots+i_n=p}} M_{r_1}(i_1) \otimes \cdots \otimes M_{r_n}(i_n)$$

toute opération $\underline{\mu} := \mu_1 \cdots \mu_n \in M^{\otimes n}$ est donc caractérisée à la fois par un *degré*

$$|\underline{\mu}| = |\nu_1| + \cdots + |\nu_n|$$

un *poids*

$$\text{poids}(\underline{\mu}) := n$$

et une *arité* (totale) p.

Définition 3.5.6. Soit M un $\mathbb{N}$-module gradué et $\mathbb{K}s := (\mathbb{K}s, 0, 0, ...)$ le $\mathbb{N}$-module concentré en degré 1 et arité 0. La *suspension* de M est

$$sM := \mathbb{K}s \otimes M.$$

En particulier, $sM_p(n) = M_{p-1}(n)$. De manière analogue la *désuspension* de M est définie via le $\mathbb{N}$-module $\mathbb{K}s^{-1} := (\mathbb{K}s^{-1}, 0, 0, ...)$ concentré en degré -1 et arité 0 par la formule

$$s^{-1}M := \mathbb{K}s^{-1} \otimes M.$$

En particulier, $s^{-1}M_p(n) = M_{p+1}(n)$.

Définition 3.5.7. Une *opérade non-symétrique graduée* non-unitaire est un $\mathbb{N}$-module gradué $\mathscr{P}$ muni d'une composition $\gamma : \mathscr{P} \circ \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ de degré $|\gamma| = 0$, c'est-à-dire vérifiant

$$\gamma(\gamma \circ \mathrm{Id}) = \gamma(\mathrm{Id} \circ \gamma).$$

Elle est dite unitaire s'il existe de plus un morphisme $\eta : I \to \mathscr{P}$ de degré $|\eta| = 0$ tel que

$$\gamma(\eta \circ \mathrm{Id}) = \gamma(\mathrm{Id} \circ \eta) = \mathrm{Id}.$$

Un *morphisme* entre deux opérades graduées non-unitaires $(\mathscr{P}, \gamma_{\mathscr{P}})$ et $(\mathscr{Q}, \gamma_{\mathscr{Q}})$ est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules gradués $\alpha : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ respectant l'équation

$$\alpha\gamma_{\mathscr{P}} = \gamma_{\mathscr{Q}}.$$

Les opérades non-symétriques unitaires (resp. non-unitaires) munies de leurs morphismes forment une catégorie notée gOp (resp. guOp).

REMARQUE 3.5.8. Comme dans le cas des algèbres graduées, le fait que $|\gamma| = 0$ entraîne que $|\alpha| = 0$.

EXEMPLES. Toute opérade peut être vue comme une opérade graduée concentrée en degré 0 ; on a donc une inclusion de catégories Op$\hookrightarrow$gOp. Toute opérade graduée sur $\mathbb{N}$ l'est sur $\mathbb{Z}$ en posant $M_p(n) = 0$ pour tout $p < 0$. L'opérade des arbres $\mathbb{T}(M)$ est graduée par le degré homologique. En effet, la composition γ déduite des $\circ_i$ est de degré 0 et l'inclusion de I dans $\mathbb{T}(M)$ donne l'unité.

REMARQUE 3.5.9. La notion d'opérade graduée libre est définie de manière analogue à celle d'algèbre graduée libre. La proposition suivante se montre directement.

Proposition 3.5.10. *L'opérade des arbres munie de l'injection est libre dans la catégorie des opérades graduées.*

REMARQUE 3.5.11. Toutes les définitions précédentes se dualisent sans peine au monde des coopérades. On obtient ainsi une notion de coopérade graduée, de coopérade graduée libre de même qu'une proposition analogue à la précédente stipulant que la coopérade des arbres munie de la projection est colibre dans la catégorie des coopérades graduées.

3.6 Dérivation, codérivation

En définissant la catégorie monoïdale ($\mathbb{N}$-mod,$\circ$,I) nous avons généralisé la catégorie (Vect,$\otimes$,$\mathbb{K}$). Nous avons gagné en structure (ce qui permet de décrire des phénomènes beaucoup plus riches) mais nous avons perdu en simplicité. D'abord, à la différence de Vect, $\mathbb{N}$-mod n'est pas une catégorie monoïdale symétrique. Ensuite, le produit de composition $\circ$ est linéaire à gauche et pas à droite car $M \circ N$ contient une seule composante de M mais plusieurs composantes de N.

Afin de pouvoir définir la notion de dérivation pour les $\mathbb{N}$-modules gradués, il nous faut d'abord *linéariser* le produit de composition ; il faut intuitivement se restreindre au cas où N n'a plus «qu'une seule composante» dans $M \circ N$.

Considérons le foncteur qui à trois $\mathbb{N}$-modules gradués M, N_1 et N_2 associe le $\mathbb{N}$-module gradué $M \circ (N_1 \oplus N_2)$. Considérons la restriction à sa partie linéaire en N_2 et notons ce nouveau foncteur $M \circ (N_1; N_2)$. Autrement dit, ce nouveau foncteur est tel que

$$M \circ (N_1; N_2 \oplus N_2') = M \circ (N_1; N_2) \oplus M \circ (N_1; N_2').$$

Cela correspond à restreindre notre étude au sous-$\mathbb{N}$-module gradué de

$$M \circ (N_1 \oplus N_2) = \bigoplus_n M(n) \otimes (N_1 \oplus N_2)^{\otimes n}$$

où la composante N_2 n'apparaît qu'une et une seule fois.

Définition 3.6.1. Soient $f : M_1 \to N_1$ et $g : M_2 \to N_2$ des morphismes de $\mathbb{N}$-modules gradués. Leur *composition infinitésimale* $f \circ' g$ est définie par

$$\begin{array}{rcccl} f \circ' g & : & M_1 \circ N_1 & \to & M_2 \circ (N_1; N_2) \\ & & (\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k) & \mapsto & \sum_i (f(\mu);, \nu_1, \ldots, g(\nu_i), \ldots, \nu_k) \end{array}$$

Définition 3.6.2. Soit $(\mathscr{P}, \gamma_{\mathscr{P}})$ une opérade graduée, unitaire ou non. Une *dérivation* par rapport à la composition de $\mathscr{P}$ est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules gradués $d_{\mathscr{P}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ vérifiant

$$d_{\mathscr{P}} \gamma = \gamma(d_{\mathscr{P}} \circ \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \circ' d_{\mathscr{P}}).$$

REMARQUE 3.6.3. Sur les opérations, cela signifie

$$d_{\mathscr{P}}(\gamma(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k)) = \gamma(d_{\mathscr{P}}(\mu); \nu_1, \ldots, \nu_k) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_i} \gamma(\mu; \nu_1, \ldots, d_{\mathscr{P}}(\nu_i), \ldots, \nu_k)$$

où l'exposant ε_i est défini par $\varepsilon_i := |\mu| + |\nu_1| + \cdots + |\nu_{i-1}|$ et est nul $\varepsilon_i = 0$ dans le cas non-gradué. Il est possible de se représenter cette action de manière «arboricole» comme sur la figure 3.9. Attention : les sommets des arbres ont été représentés séparément alors qu'ils sont en réalité contractés par la composition γ.

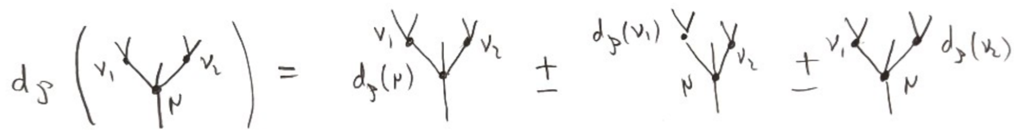


FIGURE 3.9 – La dérivation d'une opération dans une opérade.

REMARQUE 3.6.4. Il est clair qu'en choisissant une opérade graduée concentrée en arité 1 on retrouve la notion de dérivation pour les algèbres associatives graduées.

Définition 3.6.5. Le *produit infinitésimal de composition* de deux $\mathbb{N}$-modules gradués M et N est défini par

$$M \circ_{(1)} N := M \circ (I; N).$$

Ses éléments sont de la forme $(\mu; \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}, \nu, \mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id})$ avec $\mu \in M$ et $\nu \in N$.

REMARQUE 3.6.6. Le produit infinitésimal de composition d'un $\mathbb{N}$-module gradué M avec lui-même est isomorphe à la composante de poids 2 de son module des arbres.

$$M \circ_{(1)} M \cong \mathbb{T}(M)^{(2)}$$

.

Définition 3.6.7. Considérons une opérade graduée unitaire $\mathscr{P}$. La *composition infinitésimale* $\gamma_{(1)}$ est définie comme la composée des morphismes

$$\mathscr{P} \circ_{(1)} \mathscr{P} \hookrightarrow \mathscr{P} \circ (I \oplus \mathscr{P}) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \circ (\eta + \mathrm{Id}_{\mathscr{P}})} \mathscr{P} \circ \mathscr{P} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{P}$$

Il s'agit de la restriction de la composition γ à deux opérations de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire précisément l'ensemble des compositions partielles $\mu \circ_i \nu$.

On dispose d'une caractérisation des dérivations sur l'opérade des arbres associée à un $\mathbb{N}$-module gradué.

Proposition 3.6.8. *Soit M un $\mathbb{N}$-module gradué. L'ensemble des dérivations de l'opérade des arbres $\mathbb{T}(M)$ -resp. $\overline{\mathbb{T}}(M)$- est en bijection avec les morphismes de $\mathbb{N}$-modules gradués $M \to \mathbb{T}(M)$ -resp. $M \to \overline{\mathbb{T}}(M)$.*

Démonstration. La preuve se fait par réccurrence sur le nombre de sommets internes des arbres ; elle est analogue à celle de la proposition 2.4.3. □

REMARQUE 3.6.9. Ainsi, une dérivation $d : \mathbb{T}(M) \to \mathbb{T}(M)$ est entièrement caractérisée par sa restriction $d \circ i : M \to \mathbb{T}(M)$.

REMARQUE 3.6.10. Pour retrouver le cas non-gradué, il suffit de considérer un $\mathbb{N}$-module M comme un $\mathbb{N}$-module gradué concentré en degré 0 : dès lors, tous les éléments de M sont de degré 0 et les formules sont les mêmes, les signes en moins.

REMARQUE 3.6.11. La notion de dérivation par rapport à la composition d'une opérade de même que la proposition précédente se dualisent sans peine. On obtient ainsi la notion de codérivation par rapport à la décomposition d'une coopérade de même qu'une caractérisation des codérivations sur la coopérade des arbres par les morphismes de $\mathbb{N}$-modules gradués $\mathbb{T}(M) \to M$.

3.7 Opérade différentielle graduée, opérade quasi-libre

Définition 3.7.1. Une *différentielle* sur un $\mathbb{N}$-module gradué M est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules gradués $d : M \to M$ de degré $|d| = -1$ et de carré nul $d^2 = 0$.

On peut le représenter visuellement par une famille de longues suites exactes d'espaces vectoriels

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{(d_n)_{p+1}} & M_p(n) & \xrightarrow{(d_n)_p} & M_{p-1}(n) & \xrightarrow{(d_n)_{p-1}} \cdots \\
\cdots \xrightarrow{(d_{n-1})_{p+1}} & M_p(n-1) & \xrightarrow{(d_{n-1})_p} & M_{p-1}(n-1) & \xrightarrow{(d_{n-1})_{p-1}} \cdots
\end{array}$$

Les $\mathbb{N}$-modules gradués munis d'une différentielle sont appelés $\mathbb{N}$-modules différentiels gradués. Un morphisme de $\mathbb{N}$-modules différentiels gradués $f : (M,d) \to (N,d')$ est un morphisme de $\mathbb{N}$-modules gradués commutant avec la différentielle, i.e. pour tout p on dispose d'une famille infinie de diagrammes commutatifs

$$\cdots \quad \begin{tikzcd} M_p(n) \arrow[r, "(d_n)_p"] \arrow[d, "(f_n)_p"] & M_{p-1}(n) \arrow[d, "(f_n)_{p-1}"] \\ N_m(n) \arrow[r, "(d'_n)_m"] & N_{m-1}(n) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} M_p(n-1) \arrow[r, "(d_{n-1})_p"] \arrow[d, "(f_{n-1})_p"] & M_{p-1}(n-1) \arrow[d, "(f_{n-1})_{p-1}"] \\ N_m(n-1) \arrow[r, "(d'_{n-1})_m"] & N_m(n-1) \end{tikzcd} \quad \cdots$$

Les $\mathbb{N}$-modules différentiels gradués munis de leurs morphismes forment une catégorie notée dg$\mathbb{N}$-mod.

REMARQUE 3.7.2. Cette catégorie munie du produit de composition est en fait une catégorie monoïdale (dg$\mathbb{N}$-mod, $\circ, I$). L'action du bifoncteur $- \circ -$ sur les objets et les morphismes de g$\mathbb{N}$-mod a été définie précédemment ; pour qu'il soit bien défini sur dg$\mathbb{N}$-mod, il nous faut spécifier ce qui advient de la différentielle. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux $\mathbb{N}$-modules différentiels gradués. Munissons le produit de composition $M \circ N$ du morphisme de $\mathbb{N}$-modules gradués

$$d_{M \circ N} := d_M \circ \mathrm{Id}_N + \mathrm{Id}_M \circ' d_N.$$

Sur les éléments on obtient

$$d_{M\circ N}(\mu;\nu_1,...,\nu_k) = (d_M(\mu);\nu_1,...,\nu_k) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{\varepsilon_i}(\mu;\nu_1,...,d_N(\nu_i),...,\nu_k)$$

où $\varepsilon_i := |\mu| + |\nu_1| + \cdots + |\nu_{i-1}|$. Un calcul direct que $d^2_{M\circ N} = 0$. De plus, il est possible de montrer que si $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$ sont des morphismes de $\mathbb{N}$-modules différentiels gradués, alors $f \circ g$ en est un également. Dès lors, notre bifoncteur $- \circ -$ est bien défini dans dg$\mathbb{N}$-mod.

REMARQUE 3.7.3. Ici, le $\mathbb{N}$-module gradué I est considéré comme un $\mathbb{N}$-mod différentiel gradué concentré en degré 0 et arité 1, avec la seule différentielle possible.

Définition 3.7.4. Une *opérade différentielle graduée* est un monoïde dans la catégorie dg$\mathbb{N}$-mod. Un *morphisme* d'opérades différentielles graduées est un morphisme de monoïdes dans cette même catgéroie. Il est nécessairement de degré 0.

Les opérades différentielles graduées munies de leurs morphismes forment une catégorie notée dgOp.

EXEMPLES. L'opérade des endomorphismes End_V d'un complexe de chaînes V est une opérade différentielle graduée.

REMARQUE 3.7.5. Les notions d'opérades différentielles graduées libre et quasi-libre sont définies de manière analogue à celles d'algèbres différentielles graduées libre et quasi-libre. Les deux propositions suivantes sont des généralisations directes des propositions correspondantes pour les algèbres différentielles graduées.

Proposition 3.7.6. *Il existe une unique extension d'une différentielle de M à une différentielle de $\mathbb{T}(M)$.*

Proposition 3.7.7. *L'opérade des arbres munie de l'injection est libre dans la catégorie des opérades différentielles graduées.*

REMARQUE 3.7.8. Toute cette section peut également être dualisée de manière à obtenir la notion de coopérade différentielle graduée, de coopérade différentielle graduée colibre ou quasi-colibre de même que les deux propositions permettant d'affirmer que la coopérade des arbres munie de la projection est libre dans la catégorie des coopérades différentielles graduées.

EXEMPLE 3.7.9. (**La construction bar**) Soit $\mathscr{P}$ une opérade différentielle graduée augmentée $\mathscr{P} = I \oplus \overline{\mathscr{P}}$. Considérons le morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\begin{array}{rcl} \gamma_s : \mathbb{K}s \otimes \mathbb{K}s & \to & \mathbb{K}s \\ s \otimes s & \mapsto & s \end{array}$$

Il est de degré $|\gamma_s| = -1$. Notons $\overline{\gamma}_{(1)} : \overline{\mathscr{P}} \circ_{(1)} \overline{\mathscr{P}} \to \overline{\mathscr{P}}$ la restriction de la composition infinitésimale $\gamma_{(1)}$ à la partie réduite de $\mathscr{P}$. Considérons maintenant la composition

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}}) & \xrightarrow{p^{(2)}} & (\mathbb{K}s \otimes \overline{\mathscr{P}}) \circ_{(1)} \mathbb{K}s \otimes \overline{\mathscr{P}} \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}} \\ & & (\mathbb{K}s \otimes \mathbb{K}s) \otimes (\overline{\mathscr{P}} \circ_{(1)} \overline{\mathscr{P}}) \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle \gamma_s\otimes\overline{\gamma}_{(1)}} \\ & & \mathbb{K}s \otimes \overline{A} \end{array}$$

et notons la φ. Il s'agit d'un morphisme d'espaces vectoriels gradués de degré -1 (seule γ_s est de degré -1 ; tous les autres morphismes sont de degré 0). Il existe une unique codérivation

$$d_2 : \mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}}) \to \mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}})$$

étendant φ. Cette codérivation est en fait une *codifférentielle* :

Proposition 3.7.10. *L'associativité de γ implique que $d_2^2 = 0$.*

D'autre part, la différentielle $d_{\mathscr{P}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ induit une unique codifférentielle

$$d_1 : \mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}}) \to \mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}})$$

sur $T^c(s\overline{A})$. Maintenant, le fait que la composition γ soit un morphisme d'opérades différentielles graduées implique que d_1 et d_2 *anticommutent*

$$d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$$

Dès lors, $d_{\mathrm{B}\mathscr{P}} := d_1 + d_2$ est une codifférentielle sur $\mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}})$. On nomme la coopérades différentielle graduée conilpotente

$$\mathrm{B}\mathscr{P} := (\mathbb{T}^c(s\overline{\mathscr{P}}), d_{\mathrm{B}\mathscr{P}})$$

la *construction bar* de $\mathscr{P}$. La correspondance qu'elle induit est en fait *fonctorielle*, c'est- à-dire que $\mathrm{B}-$ est un foncteur des la catégorie des opérades différentielles graduées augmentées vers la catégorie des coopérades différentielles graduées conilpotentes. Chaque coopérde BA est quasi-colibre dans cette catégorie.

3.8 Opérades à homotopie près

Lorsque nous avons défini la notion d'algèbre associative à homotopie près, nous avons «relâché» l'associativité du produit d'une algèbre de manière cohérente ; pour cela nous avons eu besoin d'une infinité d'homotopies supérieures, soit une opération pour chaque arité $n \geqslant 3$. Maintenant que nous avons défini la notion d'opérades, qui est une généralisation de la notion d'algèbre associative, nous pouvons nous demander : existe-t-il une notion analogue d'opérade à homotopie près ? Est-il possible de «relâcher» de manière cohérente la composition des opérations dans une opérade ? La réponse affirmative à cette question a été apportée par Pepijn van der Laan dans sa thèse [VdL02]. Il y définit de manière parfaitement analogue au cas des algèbres la notion suivante.

Définition 3.8.1. Une *opérade non-symétrique à homotopie près* ou est un $\mathbb{N}$-module gradué M dont la coopérade colibre $\overline{\mathbb{T}^c}(sM)$ est munie d'une codifférentielle $\partial : \overline{\mathbb{T}^c}(sM) \to \overline{\mathbb{T}^c}(sM)$.

L'existence d'une codifférentielle ∂ sur la coopérade colibre $\overline{\mathbb{T}^c}(sM)$ est équivalente, comme dans le cas des algèbres, à l'existence d'une famille d'opérations $\circ_t$ pour tout arbre planaire enraciné t. La condition $\partial^2 = 0$ induit ici pour chaque arbre planaire enraciné t une relation de la forme

$$\sum_{s \subset t} \pm(\circ_{t/s}) \circ (\circ_s)$$

où la somme porte sur tous les sous-arbres connexes s de t et l'arbre t/s est obtenu en contractant le sous-arbre s en un point. Les signes impliqués dans la formule sont une conséquence de l'ordre choisi sur les sommets des arbres t et s de même que de la convention de Koszul.

REMARQUE 3.8.2. En choisissant un $\mathbb{N}$-module gradué concentré en arité 1 on retrouve la définition d'une algèbre associative à homotopie près.

Chapitre 4

La diagonale de l'associaèdre

Supposons que nous ayons entre les mains deux algèbres associatives (A,μ_A) et (B,μ_B), et que nous souhaitions faire leur produit tensoriel. Il s'agit de définir un produit $\mu_{A\otimes B}$ sur $A\otimes B$ à partir des produits respectifs de A et B. En notant σ_2 l'isomorphisme $(A\otimes B)^{\otimes 2}\to A^{\otimes 2}\otimes B^{\otimes 2}$, on pose naturellement

$$\mu_{A\otimes B} := (\mu_A\otimes\mu_B)\sigma_2.$$

Il s'avère que ce produit est bien associatif du fait que μ_A et μ_B le sont ; on les a tout simplement mis «côte à côte».

Supposons que l'on veuille faire la même chose pour deux algèbres associatives à homotopie près $(A,\{\mu_n\})$ et $(B,\{\nu_n\})$. La tâche est plus compliquée. En effet, cette fois A et B sont munies d'une *infinité* d'opérations, chacune vérifiant de plus les *relations*

$$\sum_{p+q+r=n}(-1)^{p+qr}\mu_{p+1+r}\circ(\mathrm{id}^{\otimes p}\otimes\mu_q\otimes\mathrm{id}^{\otimes r})=0 \quad \text{et} \quad \sum_{p+q+r=n}(-1)^{p+qr}\nu_{p+1+r}\circ(\mathrm{id}^{\otimes p}\otimes\nu_q\otimes\mathrm{id}^{\otimes r})=0.$$

Il nous faut déterminer une famille d'opérations $\phi_n : (A\otimes B)^n\to A\otimes B$ exprimées à l'aide des μ_n et des ν_n et vérifiant les relations

$$\sum_{p+q+r=n}(-1)^{p+qr}\phi_{p+1+r}\circ(\mathrm{id}^{\otimes p}\otimes\phi_q\otimes\mathrm{id}^{\otimes r})=0. \tag{4.1}$$

On veut déjà que pour $n=2$ notre opération coïncide avec celle tout juste définie pour les algèbres

$$\phi_2=(\mu_2\otimes\nu_2)\sigma_2.$$

Il s'agit de la seule opération où nous pouvons «simplement» mettre μ_n et ν_n côte à côte ; en effet, le degré de ϕ_n doit être $|\phi_n|=n-2$.

Notons σ_n l'isomorphisme $(A\otimes B)^{\otimes n}\to A^{\otimes n}\otimes B^{\otimes n}$. Un certain travail nous mène aux premières opérations :

$$\begin{array}{rcl}
\phi_1 & := & \mu_1\otimes 1+1\otimes\nu_1\\
\phi_2 & := & (\mu_2\otimes\nu_2)\sigma_2\\
\phi_3 & := & [\mu_2(\mu_2\otimes 1)\otimes\nu_3+\mu_3\otimes\nu_2(1\otimes\nu_2)]\sigma_3\\
\phi_4 & := & [\mu_3(\mu_2\otimes 1\otimes 1)\otimes\nu_3(1\otimes 1\otimes\nu_2)+\mu_3(1\otimes\mu_2\otimes 1)\otimes\nu_2(1\otimes\nu_3)\\
 & & +\mu_2(\mu_2\otimes 1)(\mu_2\otimes 1\otimes 1)\otimes\nu_4+\mu_4\otimes\mu_2(1\otimes\mu_2)(1\otimes 1\otimes\mu_2)\\
 & & +\mu_2(\mu_3\otimes 1)\otimes\nu_3(1\otimes\nu_2\otimes 1)+\mu_2(\mu_3\otimes 1)\otimes\nu_2(1\otimes\nu_3)]\sigma_4\\
\phi_5 & = & \dots
\end{array} \tag{4.2}$$

On vérifie sans trop de difficulté que les relations (4.1) sont satisfaites pour $n=1,2$ et 3. Le cas $n=4$ est marquant par sa complexité a priori inexpliquée. Pour des n plus grands, les calculs gagnent encore en complexité. Il nous faut donc une approche plus conceptuelle.

Considérons deux opérades $(\mathscr{P},\gamma^{\mathscr{P}})$ et $(\mathscr{Q},\gamma^{\mathscr{Q}})$. Le *produit tensoriel de Hadamard* des $\mathbb{N}$-modules (ou des $\mathbb{S}$-modules) sous-jacents, du nom du mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963), est défini en arité n par

$$\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q}(n) := \mathscr{P}(n) \otimes \mathscr{Q}(n).$$

Ce dernier peut être muni très naturellement d'une structure d'opérade via permutation des termes en jeu dans le produit de composition, puis l'application du produit tensoriel des produits de composition $\gamma^{\mathscr{P}}$ et $\gamma^{\mathscr{Q}}$.

$$\begin{array}{cl}
 & (\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q})(k) \otimes (\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q})(i_1) \otimes \cdots \otimes (\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q})(i_k) \\
= & \mathscr{P}(k) \otimes \mathscr{Q}(k) \otimes \mathscr{P}(i_1) \otimes \mathscr{Q}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{P}(i_k) \otimes \mathscr{Q}(i_k) \\
\cong & (\mathscr{P}(k) \otimes \mathscr{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{P}(i_k)) \otimes (\mathscr{Q}(k) \otimes \mathscr{Q}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{Q}(i_k)) \\
\xrightarrow{\gamma^{\mathscr{P}} \otimes \gamma^{\mathscr{Q}}} & \mathscr{P}(n) \otimes \mathscr{Q}(n) = (\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q})(n)
\end{array}$$

en jeu dans le produit de composition, puis l'application de $\gamma^{\mathscr{P}} \otimes \gamma^{\mathscr{Q}}$. L'opérade ainsi obtenue est appelée *produit de Hadamard* des opérades $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ et elle est notée $\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q}$.

Proposition 4.0.1. *Considérons une $\mathscr{P}$-algèbre A et une $\mathscr{Q}$-algèbre B. Leur produit tensoriel $A \otimes B$ est une $\mathscr{P} \underset{H}{\otimes} \mathscr{Q}$-algèbre.*

Démonstration. Désignons les morphismes d'opérades définissant A et B par $\gamma_A : \mathscr{P} \to \mathrm{End}_A$ et $\gamma_B : \mathscr{P} \to \mathrm{End}_B$. L'isomorphisme σ_n induit un morphisme d'opérades

$$\mathrm{End}_A \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathrm{End}_B \to \mathrm{End}_{A \otimes B}.$$

En précomposant avec le morphisme

$$\gamma_A \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \gamma_B : \mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{Q} \to \mathrm{End}_A \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathrm{End}_B,$$

on obtient le morphisme d'opérades attendu. □

Le grand intérêt de ce que nous venons d'établir est contenu dans la proposition suivante :

Proposition 4.0.2. *Soit $\mathscr{P}$ une opérade. Tout morphisme d'opérades $\Delta_{\mathscr{P}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P} \underset{H}{\otimes} \mathscr{P}$ munit le produit tensoriel sous-jacent de deux $\mathscr{P}$-algèbres A et B d'une structure de $\mathscr{P}$-algèbre.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, $A \otimes B$ est une $\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{P}$-algèbre ; il existe donc un morphisme d'opérades

$$\mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{P} \to \mathrm{End}_{A \otimes B}$$

En précomposant avec le morphisme $\Delta_{\mathscr{P}}$ on obtient une structure de $\mathscr{P}$-algèbre sur $A \otimes B$. □

Dès lors, pour avoir une structure de $\mathscr{P}$-algèbre sur le produit tensoriel de deux $\mathscr{P}$-algèbres, il suffit de disposer d'une diagonale $\mathscr{P} \to \mathscr{P} \underset{\mathrm{H}}{\otimes} \mathscr{P}$ qui soit un morphisme d'opérades. Dans le cas de l'opérade As, un tel morphisme est donné en arité n par

$$\begin{array}{ccc}
As(n) & \to & As(n) \otimes As(n) \\
\mu_n & \mapsto & \mu_n \otimes \mu_n
\end{array}$$

Nous obtenons ainsi une explication conceptuelle du fait que le produit établi «à la main» $\mu_{A \otimes B}$ donne bien une structure d'algèbre associative sur le produit tensoriel de deux telles algèbres. Mais, surtout, nous gagnons ainsi un angle d'attaque pour la définition du produit tensoriel d'algèbres associatives à homotopie près ! Il nous faut donc :

1) Une opérade A_∞ dont les $\mathscr{P}$-algèbres sont les A_∞-algèbres.

2) Une famille de diagonales $A_\infty(n) \to A_\infty(n) \otimes A_\infty(n)$ qui induisent un morphisme d'opérades.

Les prochaines sections sont dédiées à ces tâches.

4.1 L’opérade des algèbres associatives à homotopie près

Considérons un complexe de chaînes (A, d_A). Il est possible de munir le $\mathbb{N}$-module (ou $\mathbb{S}$-module) End_A de la différentielle définie en arité n par la dérivée des morphismes

$$\begin{array}{rcl} \partial_A : A^{\otimes n} & \to & A \\ f & \mapsto & d_A f - (-1)^{|f|} f d_{A^{\otimes n}}. \end{array}$$

La formule pour la différentielle $d_{A^{\otimes n}}$ sur l’espace $A^{\otimes n}$ est donnée par la remarque 2.5.12. L’opérade des endomorphismes munie de cette différentielle devient alors une opérade différentielle graduée notée $(\mathrm{End}_A, \partial_A)$.

Supposons que $\mathscr{P}, d_{\mathscr{P}}$ soit une opérade différentielle graduée. Nous pouvons maintenant définir la notion de $\mathscr{P}$-algèbre différentielle graduée associée à cette opérade.

Définition 4.1.1. Une $\mathscr{P}$-algèbre différentielle graduée est un complexe de chaînes (A, d_A) muni d’un morphisme d’opérades différentielles graduées $f : (\mathscr{P}, d_{\mathscr{P}}) \to (\mathrm{End}_A, \partial_A)$. En notant différentielle en arité $\mathscr{P}(n)$ par $d_{\mathscr{P}}$, on a pour $\mu \in \mathscr{P}(n)$ la relation

$$f(d_{\mathscr{P}}(u)) = d_A f - (-1)^{|\mu|} f(\mu) d_{A^{\otimes n}}.$$

Comme nous l’avons expliqué à la section 2.6, une algèbre associative à homotopie près peut être vue comme un complexe de chaînes (A, d_A) muni d’applications linéaires $\{m_n : A^{\otimes n} \to A\}_{n \geqslant 2}$ satisfaisant les relations

$$\partial(m_n) = - \sum_{\substack{p+q+r=n \\ k>1,\ q>1}} (-1)^{p+qr} m_{p+1+r}(\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes m_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) \tag{4.3}$$

où $\partial(m_n)$ est la dérivée de l’opération m_n. Il est ainsi possible de voir les algèbres associatives à homotopie près comme les algèbres sur une opérades non-symétrique différentielle graduée notée A_∞.

Pour obtenir l’opérade non-symétrique différentielle graduée A_∞, on part du $\mathbb{N}$-module

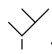
$$M = (0, 0, \mathbb{K}\mu_2, \mathbb{K}\mu_3, \ldots)$$

et on considère l’opérade libre $\mathbb{T}(M)$ que l’on munit de la différentielle induite par les relations (4.3). Dans cette description, les opérations génératrices μ_n correspondent aux opérations m_n pour $n \geqslant 2$. L’opérade différentielle graduée A_∞ est ainsi quasi-libre.

4.2 L’associaèdre ou polytope de Stasheff

Considérons d’abord l’ensemble des arbres binaires planaires à n feuilles PBT_n pour un certain $n \geqslant 1$. Il est possible de munir cet ensemble d’un ordre partiel nommé *ordre de Tamari*, du nom du mathématicien allemand puis israélien Dov Tamari (1911-2006) qui l’a introduit dans sa thèse [Tam51].

Définition 4.2.1. L’*ordre de Tamari* sur l’ensemble des arbres binaires planaires à n feuilles PBT_n est l’ordre partiel engendré par la relation

 $<$ .

Nous obtenons ainsi pour chaque n un *treillis* appelé *treillis de Tamari* et noté $(\mathrm{PBT}_n, <)$. Le treillis de Tamari pour les arbres binaires planaires à 4 feuilles $(\mathrm{PBT}_4, <)$ est représenté à la figure 4.1.

Considérons maintenant l’ensemble des arbres planaires à n feuilles PT_n, pour un certain $n \geqslant 1$. Lui aussi peut être muni d’un ordre partiel en choisissant d’abord un arbre minimal, puis en considérant un arbre s plus petit qu’un arbre t s’il est possible de passer de s à t par une suite de contractions d’arêtes.

Définition 4.2.2. Un *associaèdre* de dimension $n-2$ est un polytope dont le treillis des faces est isomorphe au treillis des arbres planaires à n feuilles PT_n.

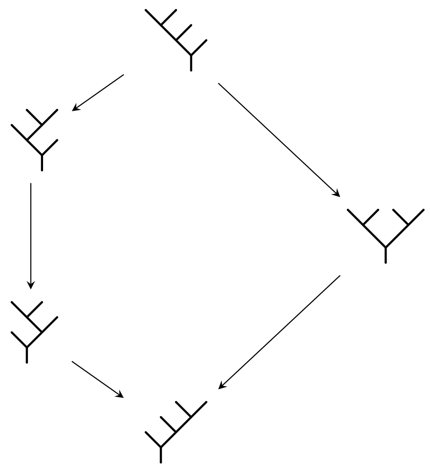


FIGURE 4.1 – Le treillis de Tamari $(\mathrm{PBT}_4, <)$ avec l'arbre minimal placé en haut.

Ce polytope est un complexe cellulaire de dimensions $n-2$ noté $\mathscr{K}^{n-2}$, également appelé polytope de Stasheff, du nom du mathématicien américain Jim Stasheff (1936-) qui l'a introduit dans [Sta63]. Chacun des sommets du polytope correspond à un arbre binaire planaire $t \in \mathrm{PBT}_n$.

Notons $\mathrm{PT}_{n,k}$ l'ensemble des arbres planaires à n feuilles et k sommets internes. Les cellules de dimension k de $\mathscr{K}^{n-2}$ sont en correspondance biunivoque avec les arbres planaires $\mathrm{PT}_{n,n-1-k}$; en particulier les sommets (cellules de dimension $k=0$) correspondent aux arbres binaires planaires $\mathrm{PT}_{n,n-1} = \mathrm{PBT}_n$ et la cellule de plus grande dimension $k = n-2$ correspond à la corolle à n feuilles $\mathrm{PT}_{n,1}$.

Définition 4.2.3. Considérons un arbre binaire planaire à n feuilles $t \in \mathrm{PBT}_n$. Nous ordonnons ses $n-1$ sommets internes de gauche à droite. Considérons le $i$ème sommet ; notons a_i le nombre de feuilles s'appuyant sur son entrée gauche, et b_i le nombre de feuilles s'appuyant sur son entrée droite. Nous définissons un point de $\mathbb{Z}^{n-1}$ en multipliant les a_i et b_i pour chaque point :

$$P(t) := (a_1b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{n-1}b_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$$

La *réalisation de Loday* de l'associaèdre, du nom du mathématiciens français Jean-Louis Loday (1946-2012) qui l'a introduite dans [Lod04], est le polytope obtenu en prenant l'enveloppe convexe des points $P(t)$ pour tous les arbres binaires planaires

$$K_n := \mathrm{conv}\{P(t) \mid t \in \mathrm{PBT}_n\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

Il s'avère que les complexes de chaînes cellulaires associés à la famille d'associaèdres de dimensions $n-2$ décrit fidèlement l'opérade A_∞ et ce, indépendamment de sa réalisation.

Proposition 4.2.4. *[Sta63] La composante d'arité n de l'opérade A_∞ est isomorphe en tant que complexes de chaînes au complexe de chaînes cellulaires de l'associaèdre $C_\bullet(\mathscr{K}^{n-2})$.*

Démonstration. D'après la description que nous en avons faite précédemment, l'opérade non-symétrique A_∞ est, sans la différentielle, libre avec un générateur en chaque arité $n \geqslant 2$. Ce fait implique un isomorphisme d'espaces vectoriels $A_\infty(n) \cong \mathbb{K}[\mathrm{PT}_n]$. Sous cette bijection, l'opération m_n correspond à la corolle à n feuilles. D'autre part, les cellules de l'associaèdre $\mathscr{K}^{n-2}$ sont par définition en bijection avec PT_n, ce qui implique l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbb{K}[\mathrm{PT}_n] \cong C_\bullet(\mathscr{K}^{n-2})$. Montrer que ces isomorphismes sont également des isomorphismes de complexes de chaînes revient à montrer que prendre le bord d'une cellule correspondant à l'opération m_n revient à énoncer la relation (4.3). Le cas pour $n = 4$ est représenté à la figure 4.2. □

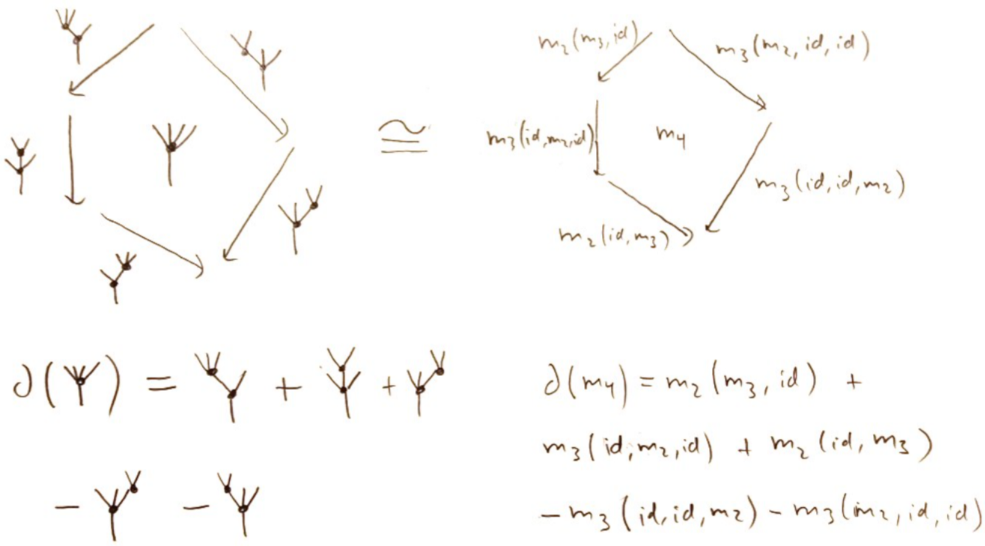


FIGURE 4.2 – La correspondance entre les structures différentielles des chaînes cellulaires de l'associaèdre et de l'opérade A_∞.

4.3 Une approximation cellulaire de la diagonale

Le foncteur des chaînes cellulaires $C_\bullet$ est monoïdal fort, c'est-à-dire qu'il préserve les monoïdes, donc en particulier la structure d'opérade. Ce fait remarquable nous autorise la question suivante : existe-t-il une structure d'opérade topologique (éventuellement cellulaire) sur la famille des associaèdres $K := \{K_n\}$ telle que ses chaînes cellulaires soient isomorphes *en tant qu'opérade différentielle graduée* à l'opérade A_∞ ? Plus que cela, existe-t-il une diagonale topologique (éventuellement cellulaire) $K \to K \times K$ qui induise un morphisme d'opérades $A_\infty \to A_\infty \underset{\mathrm{H}}{\otimes} A_\infty$?

Tout d'abord, la diagonale ensembliste d'un polytope n'est pas compatible avec la structure cellulaire ; il nous faut donc trouver une approximation cellulaire de la diagonale, c'est-à-dire une application qui lui est homotope. Trouver en plus une structure d'opérade topologique (cellulaire) qui soit préservée par ce morphisme est un problème très contraint et non-trivial.

Une réponse affirmative aux deux questions posées plus haut a attendu près de 70 ans après les travaux de Stasheff pour être trouvée. Dans un article récent [MTTV19], Naruki Matsuda, Hugh Thomas, Andy Tonks et Bruno Vallette ont introduit une nouvelle méthode, inspirée de la théorie des polytopes fibrés de Billera-Sturmfels [BS92], permettant de résoudre le problème de l'approximation cellulaire de la diagonale d'une famille de polytopes cohérente avec la relation d'ordre des faces et de l'appliquer au cas de l'associaèdre. Leur démarche peut être résumée de la façon suivante :

1) On définit d'abord une généralisation de la réalisation de Loday de l'associaèdre, une réalisation «avec poids». On assigne d'abord un poids $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ aux feuilles ordonnées des arbres binaires planaires PBT_n ; on considère, pour le $i$ème sommet d'un tel arbre t, la somme α_i des poids supportés par son entrée gauche et la somme β_i des poids supportés par son entrée droite. Les produits $\alpha_i\beta_i$ déterminent, comme précédemment, un point de $\mathbb{R}^{n-1}$
$$P(t,\omega) := (\alpha_1\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1}\beta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$
La réalisation de Loday de poids ω est alors définie comme l'enveloppe convexe de ces points
$$K_\omega := \mathrm{conv}\{P(t,\omega) \mid t \in \mathrm{PBT}_n\} \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$
La réalisation $K_{(1,1,\ldots,1)} = K_n$ est dite réalisation de poids standard. On montre que toute réalisation K_ω est une réalisation de l'associaèdre, et que toute face est isomorphe au produit de réalisations de dimensions inférieures moyennant une permutation des coordonnées (ce point est crucial) : c'est la proposition 1 de l'article.

2) Les faces de la réalisation de poids standard K_n de l'associaèdre ne sont pas affinement équivalentes à un produit de réalisations de poids standard d'associaèdres de dimensions inférieures. En conséquence, les catégories usuelles de polytopes, dont les morphismes sont affines, doivent être étendues à un cadre plus large. On définit en ce sens une catégorie de polytopes Poly, appelée «catégorie des subdivisions polytopales». Ce nom vient du fait que rirer en arrière un morphisme entre deux polytopes P et Q dans cette catégorie donne toujours une subdivision en polytopes de dimensions inférieures de P. Le treillis des faces d'un polytope P est noté $\mathscr{L}(P)$.

Définition 4.3.1. ([MTTV19], définition 5) un *complexe polytopal* est une famille finie de polytopes $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

— Le polytope vide $\emptyset$ est contenu dans $\mathscr{C}$

— $P \in \mathscr{C} \implies \mathscr{L}(P) \in \mathscr{C}$

— $P,Q \in \mathscr{C} \implies P \cap Q \in \mathscr{L}(P) \cap \mathscr{L}(Q)$

On définit ensuite la *subdivision polytopale* d'un polytope P comme un complexe polytopal $\mathscr{C}$ dont l'union des éléments est égal à P.

Définition 4.3.2. ([MTTV19], définition 7) La catégorie Poly est définie par les données suivantes.

— Les objets sont les polytopes de dimension d de $\mathbb{R}^n$, pour tout $0 \leqslant d \leqslant n$.

— Les morphismes entre deux polytopes P et Q sont les applications continues $f : P \to Q$ envoyant P homéomorphiquement sur l'union des éléments d'un sous-complexe polytopal $\mathscr{D}$ du treillis de Q dont la préimage $f^{-1}(\mathscr{D})$ par f définit une subdivision polytopale de P.

Vient ensuite un premier lemme fondamental : cette catégorie munie du produit cartésien et du polytope de dimension 0, forme une catégorie monoïdale symétrique. On pourra donc y définir des opérades !

3) On définit maintenant une orientation de nos polytopes qui permette de définir une diagonale. On souhaite que cette orientation induise l'ordre de Tamari sur les sommets de l'associaèdre pour toute réalisation de Loday K_ω.

Définition 4.3.3. ([MTTV19], définitions 8 et 9) Un *polytope orienté* est un polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ muni d'un vecteur d'orientation $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ pour lequel aucune des faces de P ne soit perpendiculaire à $\vec{v}$. Pour un point $z \in P$, on note $\rho_z P := 2z - P$ la réflexion de P par rapport à z. Un polytope orienté $(P,\vec{v})$ est *orienté positivement* si le polytope orienté résultant de l'intersection

$$P \cap \rho_z P$$

est orienté par $\vec{v}$.

Une réalisation de l'associaèdre est *bien orientée* si elle constitute un polytope orienté positivement tel que le vecteur d'orientation induise sur les sommets le treillis de Tamari.

Proposition 4.3.4. *([MTTV19], proposition 2) Pour tout poids ω, tout vecteur $\vec{v} = (v_1,\dots,v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pour lequel les composantes sont décroissantes $v_1 > v_2 > \cdots > v_{n-1}$ induit une réalisation bien orientée de la réalisation de Loday K_ω.*

4) Tout polytope orienté positivement possède un sommet supérieur $\sup(P)$ et un sommet inférieur $\inf(P)$ par rapport à l'orientation. On définit à l'aide de ces notations la *diagonale* d'un polytope orienté positivement

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{(P,\vec{v})} : P & \to & P \times P \\ z & \mapsto & (\inf(P \cap \rho_z P), \sup(P \cap \rho_z P)). \end{array}$$

On montre alors que les diagonales associées aux réalisations de Loday K_ω sont indépendantes du vecteur d'orientation choisi (Proposition 3 de l'article). Puis, on montre que pour tout polytope orienté positivement P, la diagonale $\Delta_{(P,\vec{v})}$ est un morphisme de la catégorie Poly. C'est ici que les idées provenant de la théorie des polytopes fibrés [BS92] interviennent. On obtient une subdivision polytopale particulière de tout polytope orienté positivement P ; c'est le cas des réalisations de Loday K_ω orientées par les vecteurs aux coordonnées décroissantes, mais on retrouve également comme cas particuliers l'application d'Alexander-Whitney pour les simplexes $\Delta^n \to \Delta^n \times \Delta^n$ et l'application de Serre pour les cubes $C^n \to C^n \times C^n$.

5) Pour établir une structure d'opérade sur la collection des $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ compatible avec la diagonale, on procède *à partir de la diagonale* : on définit les $\circ_i$ à partir d'applications qui commutent avec la diagonale. On obtient, via une série de lemme plus «techniques», le morphisme d'opérades recherché.

Théorème 4.3.5. *([MTTV19], Théorème I) La famille des réalisations de Loday $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ munies des compositions partielles $\circ_i$ forment une opérade non-symmétrique dans la catégorie Poly. De plus, les applications $\Delta_n : K_n \to K_n \times K_n$ forment un morphisme d'opérades non-symétriques dans la catégorie Poly.*

6) Le fait que l'approximation cellulaire de la diagonale de l'associaèdre soit un morphisme de la catégorie Poly nous permet de déduire, en tirant la tirant en arrière, une subdivision polytopale cohérente de l'associaèdre, appelée «formule magique» par Jean-Louis Loday.

Théorème 4.3.6. *([MTTV19], Théorème II) Pour toute réalisation de Loday de l'associaèdre, l'approximation de la diagonale Δ_n satisfait*

$$Im\ \Delta_n = \bigcup_{\substack{sup\ F \leqslant\ inf\ G \\ dim\ F + dim\ G = n-2}} F \times G.$$

En effet, cette formule permet d'obtenir *géométriquement* les opérations ϕ_n de l'équation (4.2) pour le produit tensoriel d'A_∞-algèbres. Par exemple, ϕ_4 est obtenue en prenant le bord de la subdivision polytopale de K_4 représentée à la figure 4.3.

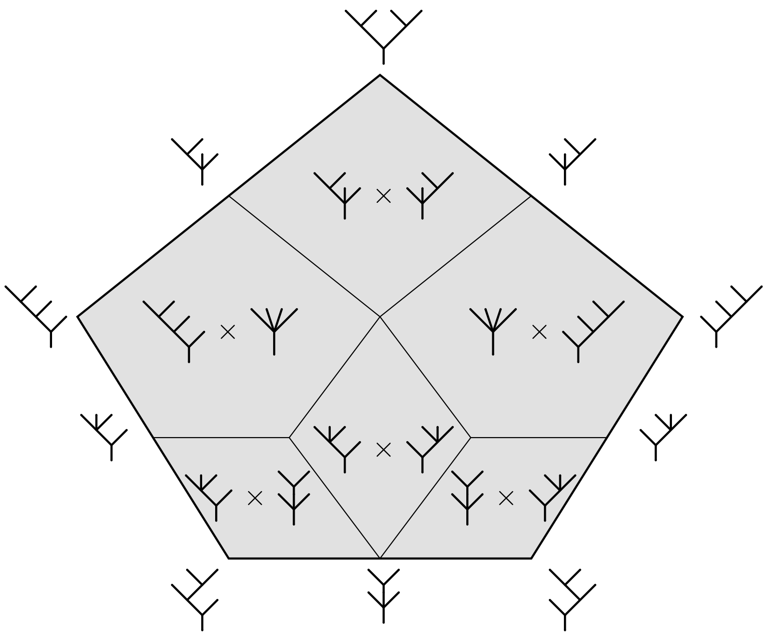


FIGURE 4.3 – La subdivision polytopale de K_4 obtenue grâce à la «formule magique».

4.4 Conclusion

La lecture de cet article fait jaillir une question très naturelle, que nous avons cherché à mettre en évidence dans le parallélisme des développements des chapitres 2 et 3 de ce travail. L'aboutissement du chapitre 2 était la notion d'A_∞-algèbre, ou algèbre à homotopie près, pour laquelle l'article [MTTV19] permet de définir explicitement un produit tensoriel. Qu'en est-il de la notion d'opérade à homotopie près, aboutissement du chapitre 3 ? Nous savons par les travaux de Van der Laan qu'il existe une opérade *colorée* qui code les opérades non-symétriques à homotopie près ; nous savons aussi depuis très peu de temps [Obr19] qu'un polytope code cette opérade colorée. Est-il possible d'appliquer les méthodes de [MTTV19] à ce polytope afin de définir le *produit tensoriel d'opérades à homotopie près* ? Cette question nous semble digne d'intérêt, et le présent travail une première étape dans le but d'y répondre.

Annexe A

Notions catégoriques

A.1 Autour de la notion de monoïde

Notre point de départ est la définition suivante :

Définition A.1.1. Un *monoïde* est un ensemble M muni

i) d'une loi de composition interne $\phi : M \times M \to M$ associative, c'est-à-dire telle que pour tout triplet d'éléments $a, b, c \in M$ et en notant $\phi(a,b) := ab$ l'égalité suivante tienne

$$a(bc) = (ab)c$$

ii) d'un élément $e \in M$ appelé «unité» tel que pour tout $m \in M$ les égalités suivantes tiennent

$$me = em = m$$

Lançons également une deuxième définition, plus générale, disposant d'une certaine parenté avec la première :

Définition A.1.2. Une *catégorie* $\mathscr{C}$ est la donnée d'objets Ob($\mathscr{C}$) et de morphismes Mor($\mathscr{C}$) entre objets munie

i) d'une composition entre morphismes associative, i.e. pour tout triplet de morphismes composables $f : c \to d$, $g : b \to c$, $h : a \to b$, l'égalité suivante tienne

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ii) d'un morphisme $\mathrm{id}_c : c \to c$ appelé «identité» pour chaque objet c de $\mathscr{C}$, tel que pour tous morphismes $f : b \to c$, $g : c \to d$ les égalités suivantes tiennent

$$\mathrm{id}_c \circ f = f$$
$$g \circ \mathrm{id}_c = g$$

Une catégorie à un objet dont les morphismes forment un ensemble est un monoïde. De manière plus générale, dans une catégorie localement petite, c'est- à-dire une catégorie où les morphismes entre deux objets quelconques forment un ensemble, les endomorphismes de tout objet forment un monoïde pour la composition. En ce sens, on peut dire qu'une catégorie est un «monoïde délocalisé», ou encore une «prolifération de monoïdes» reliés entre eux.

EXEMPLES. Les ensembles et les fonctions forment une catégorie notée Ens. Les espaces vectoriels munis des applications linéaires forment une catégorie notée Vect. Les espaces vectoriels différentiels gradués munis des morphismes de complexes de chaînes forment une catégorie notée dgVect. Les $\mathbb{N}$-modules munis des morphismes de $\mathbb{N}$-modules forment une catégorie notée $\mathbb{N}$-mod.

La notion de catégorie apparaît «plus générale» que celle d'ensemble, puisque les ensembles sont une «manifestation particulière» du concept de catégorie. Un monoïde étant un ensemble possédant des propriétés particulières, il est naturellement possible de se demander s'il existe une notion plus générale permettant de parler de monoïde dans une catégorie quelconque. Pour pouvoir parler de «loi de composition interne» $\phi : M \times M \to M$, il faut pouvoir parler du produit cartésien $M \times M$ d'un ensemble. Il nous faut donc une notion de catégorie permettant de parler du «produit» de deux objets, i.e. une catégorie avec une structure supplémentaire.

Définition A.1.3. Une *catégorie monoïdale* $(\mathscr{C}, \otimes, \alpha, I, \rho, \lambda)$ est la donnée d'une catégorie $\mathscr{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ et

i) d'un isomorphisme naturel «d'associativité» pour tout triplet d'objets $A, B, C \in \mathscr{C}$

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$$

ii) d'un objet I appelé «identité» et de deux isomorphismes naturels l'impliquant pour chaque objet $A \in \mathscr{C}$

$$\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\simeq} A$$
$$\rho_A : A \otimes I \to A$$

coïncidant sur I ($\rho_I = \lambda_I$) et rendant commmutatifs les deux digrammes suivants, appelés «identité du pentagone» et «identité du triangle»

$$\begin{tikzcd} & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \\ (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_D"] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

$$\begin{tikzcd} (A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"] \\ & A \otimes B & \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

Elle est dite *symétrique* s'il existe de plus un isomorphisme naturel «de symétrie» pour toute paire d'objets $A, B \in \mathscr{C}$

$$\tau_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

rendant commutatifs les trois diagrammes suivants, dits «de cohérence» avec l'associativité, l'unité et l'inversion

$$\begin{tikzcd} (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\tau_{A,B} \otimes \mathrm{id}_C"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}"] & (B \otimes A) \otimes C \arrow[d, "\alpha_{B,A,C}"] \\ A \otimes (B \otimes C) \arrow[d, "\tau_{A,B\otimes C}"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes \tau_{A,C}"] \\ (B \otimes C) \otimes A \arrow[r, "\alpha_{B,C,A}"] & B \otimes (C \otimes A) \end{tikzcd} \tag{A.3}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes I \arrow[rr, "\tau_{A,I}"] \arrow[dr, "\rho_A"] & & I \otimes A \arrow[dl, "\lambda_A"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{A.4}$$

$$\begin{tikzcd} & B \otimes A \arrow[dr, "\tau_{B,A}"] & \\ A \otimes B \arrow[ur, "\tau_{A,B}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{A\otimes B}"] & & A \otimes B \end{tikzcd} \tag{A.5}$$

EXEMPLES. Les ensembles munis du produit cartésien et du singleton $(\mathrm{Ens}, \times, \{*\})$ forment une catégorie monoïdale symétrique. Il en est de même pour les espaces vectoriels (gradués ou non) munis du produit tensoriel : on obtient les catégories monoïdales symétriques $(\mathrm{Vect}, \otimes, \mathbb{K})$ et $(\mathrm{dgVect}, \otimes, \mathbb{K})$. Enfin, les $\mathbb{N}$-modules munis du produit de composition et du $\mathbb{N}$-module identité forment une catégorie monoïdale *non-symétrique* $(\mathbb{N}\text{-mod}, \circ, I)$.

REMARQUE A.1.4. Attention : selon les isomorphismes naturels choisis il est possible d'obtenir plusieurs structures monoïdales différentes pour une même catégorie. Par exemple, sur dgVect on peut prendre les isomorphismes induits par

$$v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$$

ou encore ceux induits par

$$v \otimes w \mapsto w \otimes v$$

qui donnent deux structures différentes, l'une comprenant des signes et l'autre pas.

Il est maintenant possible de parler de *monoïde* dans une catégorie monoïdale (symétrique ou non).

Définition A.1.5. Un *monoïde* dans une catégorie monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes, I)$ est un objet M muni d'un morphisme dit de «multiplication»

$$\gamma : M \otimes M \to M$$

et d'un morphisme «unité»

$$\eta : I \to M$$

vérifiant les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes M) \otimes M \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma \otimes \mathrm{id}"] & M \otimes (M \otimes M) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \gamma"] & M \otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\
M \otimes M \arrow[rr, "\gamma"] & & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & M \otimes M \arrow[d, "\gamma"] & M \otimes I \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

EXEMPLES. Un monoïde dans la catégorie $(\mathrm{Ens}, \times, \{*\})$ n'est autre qu'un monoïde au sens de la définition (A.1.1). Un monoïde dans $(\mathrm{Vect}, \otimes, \mathbb{K})$ est une algèbre associative unitaire ; dans $(\mathrm{dgVect}, \otimes, \mathbb{K})$ c'est une algèbre (associative unitaire) différentielle graduée. Enfin, une opérade n'est autre qu'un monoïde dans la catégorie $(\mathbb{N}\text{-mod}, \circ, I)$.

REMARQUE A.1.6. Deux structures monoïdales différentes donnent évidemment des monoïdes différents. Sur dgVect on choisit généralement la structure avec les signes.

REMARQUE A.1.7. D'après la définition d'un monoïde dans $(\mathrm{dgVect}, \otimes, \mathbb{K})$, le produit doit être un morphisme de complexes de chaînes ; or d'après la définition de la structure monoïdale $(\mathrm{dgVect}, \otimes, \mathbb{K})$, cela revient à demander que la différentielle soit une dérivation pour le produit. En effet, si $d : A \to A$ est la différentielle et $\mu : A \otimes A \to A$ le produit, alors demander que μ soit un morphisme de dgVect revient à demander que

$$d_A \circ \mu = \mu \circ d_{A \otimes A}$$

soit encore, d'après la définition de la différentielle $d_{A \otimes A}$, que

$$d_A \circ \mu = \mu \circ (d_A \otimes \mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A \otimes d_A)$$

La notion de morphismes entre deux monoïdes M et N dans une catégorie monoïdale est très naturelle : il s'agit d'un morphisme $M \to N$ de la catégorie entre les deux objets qui soit compatible avec les morphismes de structure.

Définition A.1.8. Un *morphisme* entre deux monoïdes (M, γ^M, η^M) et (N, γ^N, η^N) dans une catégorie monoïdale $(\mathscr{C}, \otimes, I)$ est un morphisme $\alpha : M \to N \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \arrow[r, "\alpha \otimes \alpha"] \arrow[d, "\gamma^M"] & N \otimes N \arrow[d, "\gamma^N"] \\
M \arrow[r, "\alpha"] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& I \arrow[dl, "\eta^M"'] \arrow[dr, "\eta^N"] & \\
M \arrow[rr, "\alpha"] & & N
\end{tikzcd}$$

Il est immédiat que les monoïdes munis de leurs morphismes forment eux-mêmes une catégorie ; il dès lors possible de parler de la sous-catégorie des monoïdes dans la catégorie $(\mathscr{C}, \otimes, I)$. On obtient ainsi l'ensemble des monoïdes dans Ens, la catégorie des algèbres associatives unitaires As-alg dans Vect, la catégorie des algèbres différentielles graduées dgAlg dans dgVect de même que la catégorie des opérades Op dans $\mathbb{N}$-mod.

Ainsi, la majorité des constructions traitées dans ce mémoire peuvent être unifiées sous l'égide d'une seule notion très riche, celle de monoïde dans une catégorie monoïdale.

Bibliographie

[BS92] Louis J. BILLERA et Bernd STURMFELS : Fiber polytopes. *Ann. of Math.*, 2(3):527–549, 1992.

[Lod04] Jean-Louis LODAY : Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math.*, 83(3):267–278, 2004.

[LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE : *Algebraic operads*. Springer, 2012.

[MTTV19] Naruki MATSUDA, Hugh THOMAS, Andy TONKS et Bruno VALLETTE : The diagonal of the associahedra. *arXiv e-prints*, page arXiv :1902.08059, 2019.

[Obr19] Jovana OBRADOVIĆ : Combinatorial homotopy theory for operads. *arXiv e-prints*, page arXiv :1906.06260, 2019.

[Pro11] Alain PROUTÉ : Structures A-infini. Modèles minimaux de Baues-Lemaire et Kadeishvili et homologie des fibrations. *Repr. Theory Appl. Categ.*, 6(1):363–411, 2011.

[Sta63] Jim D. STASHEFF : Homotopy associativity of H-spaces, I,II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:275–292,293–312, 1963.

[Tam51] Dov TAMARI : *Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev*. Thèse de mathématiques, 1951.

[VdL02] P. Van der LAAN : *Operads up to Homotopy and Deformations of Operad Maps*. arxiv, 2002.