Devoir Maison

Vous trouverez sans doute des informations sur internet sur le sujet en question. Mais il vous est demandé d'argumenter précisément les démonstrations mathématiques en suivant les questions et en vous appuyant sur vos connaissances acquises.
Les questions avec une astérisque II-g)h)i)j) sont des questions subsidiaires présentes pour une présentation plus complète du sujet.

Exercice 1 Autour des fonctions de Bessel de première espèce

Nous allons étudier les solutions régulières de

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0 \tag{1}$$

Première partie : Equation de Bessel

On considère d'abord, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le problème de Cauchy sur l'intervalle $]0, +\infty[$ avec donnée initiale $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$ en $t_0 \in]0, +\infty[$, que l'on écrira

$$\left\{\begin{array}{l} Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{t^2-n^2}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} Y \\ Y(t_0) = Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{2}$$

I-a) Montrer que pour t_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy (2) admet une unique solution $Y \in \mathcal{C}^1(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[; \mathbb{R}^2)$.

I-b) En prenant $\|Y\|_{\mathbb{R}^2} = \max(|Y_1|, |Y_2|)$, vérifier que

$$\|Y'(t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq (1 + \frac{1}{t})\|Y\|_{\mathbb{R}^2} .$$

I-c) A l'aide du Lemme de Gronwall en déduire que l'intervalle maximal sur $]0, +\infty[$ d'existence et d'unicité d'une solution est $]0, +\infty[$.

I-d) En conclure que sur $]0, +\infty[$ l'ensemble des solutions de (1) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(]0, +\infty[; \mathbb{R})$.

Deuxième partie : Solution développable en série entière en 0

II-a) A l'aide du théorème de Lebesgue holomorphe montrer que la fonction J_n , $n \in \mathbb{Z}$, donnée par

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu - z \sin u)}\, du \tag{3}$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

II-b) Vérifier $J_n(z) = J_{-n}(-z)$. Jusqu'à la fin on travaillera essentiellement avec $J_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

II-c) Montrer à l'aide de deux intégrations par parties en u que

$$\begin{aligned} zJ_n'(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} nz \cos(u) e^{i(nu - z \sin(u))}\, du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos^2(u) e^{i(nu - z \sin(u))}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (n^2 - z^2 \cos^2(u)) e^{i(nu - z \sin(u))}\, du . \end{aligned}$$

II-d) Déduire du II-c) que $z^2 J_n'' + zJ_n' + (z^2 - n^2)J_n = 0$ sur $\mathbb{C}$. Et qu'en particulier cela donne une solution sur $\mathbb{R}$ de (1) développable en série entière avec rayon de convergence infini.

II-e) A l'aide de l'équation (1) montrer que le développement en série entière $J_n(z) = z^r \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ avec $r \in \mathbb{N}$ qui est l'ordre d'annulation de J_n en zéro, vérifie :

$$n = r, \quad a_0 \neq 0, \quad a_{2p+1} = 0 \quad a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{4p(n+p)},$$

et finalement $a_{2p} = \frac{(-1)^p n! a_0}{2^{2p} p!(p+n)!}$.

II-f) Vérifier que $J_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inu}(-i\sin u)^k \, du$. Ensuite en écrivant $-i\sin(u) = \frac{e^{-iu}-e^{iu}}{2}$ calculer $a_0 = \frac{J_n^{(n)}(0)}{n!}$ et en déduire une formule générale pour

$$\int_0^{2\pi} e^{inu}(\sin(u))^k \, du \quad , \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

On remarquera également que $(-1)^n J_n(z) = J_n(-z) = J_{-n}(z)$.

II-g)* Expliquer pourquoi on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $t_0 \in]0, \delta[$, $J_n(t_0) \neq 0$. On fixe un tel $t_0 > 0$, en déduire qu'il existe une solution Y_n de (1) sur $]0, +\infty[$ linéairement indépendante de J_n telle que $Y_n(t_0) = 0$ et $Y_n'(t_0) = 1$.

II-h)* En écrivant $\frac{Y_n(t)}{J_n(t)} = F_n(t)$ vérifier que $F_n \in \mathcal{C}^2(]0, \delta[; \mathbb{R})$ puis avec $Y_n = F_n J_n$ vérifier que

$$\forall t \in]0, \delta[, \quad t^2 J_n(t) F_n''(t) + (2t^2 J_n'(t) + tJ_n(t))F_n'(t) = 0.$$

II-i)* A l'aide du développement limité de J_n en $t = 0$, établir consécutivement les asymptotiques suivantes quand $t \to 0^+$

$$\begin{aligned}
\frac{F_n''}{F_n'} &= -\frac{2n+1}{t} + \mathcal{O}(t), \\
F_n'(t) &\sim \frac{C}{t^{2n+1}}, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
F_n(t) &\sim \frac{C}{(2n+1)t^{2n}} \\
Y_n(t) &\sim \frac{Ca_0}{(2n+1)t^n}.
\end{aligned}$$

II-j)* Conclure que pour $n > 0$, les seules solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (1) qui admettent un intervalle maximal dans $\mathbb{R}$ plus grand que $]0, +\infty[$ sont les solutions colinéaires à J_n.

Troisième partie : Fonction génératrice pour les fonctions $J_n(x)$

On fixe $x \in \mathbb{C}$ et on considère la fonction $\varphi_x(z) = e^{\frac{x}{2}(z - 1/z)}$.

III-a) Expliquez pourquoi φ_x est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

III-b) En déduire que si γ_1 et γ_2 sont deux contours de $\mathbb{C}$ ne passant pas par 0 et tels que $\text{Ind}_{\gamma_1}(0) = \text{Ind}_{\gamma_2}(0)$ alors

$$\int_{\gamma_1} \varphi_x(z) \, dz = \int_{\gamma_2} \varphi_x(z) \, dz.$$

III-c) La fonction $\varphi_x(z)$ est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$?

III-d) Montrer que la double série $\sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \frac{(xz/2)^{n_1}}{n_1!} \frac{(-1)^{n_2}(x/2)^{n_2}}{z^{n_2} n_2!}$ converge normalement sur toute couronne $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z| \leq R\}$, $0 < r < R < +\infty$, vers $\varphi_x(z)$.

III-e) En réordonnant les sommes (on précisera pourquoi on peut le faire) montrer que pour tout $0 < r < R < +\infty$

$$e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{n' \geq n} \frac{(x/2)^{2n'-n}(-1)^{n'-n}}{n'!(n'-n)!} \right] z^n$$

avec convergence normale dans $\{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$.

III-f) Avec la définition (3) de $J_n(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et utilisant en particulier le cercle de rayon 1 comme contour, donner un sens aux formules

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}}{z^{n+1}} \, dz \,,$$

puis en justifiant bien l'interversion intégrale et série (attention $\varphi_x(z)$ a une singularité essentielle en 0)

$$e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_{-n}(x) z^n \,.$$

La notation $\oint$ désigne une intégrale de contour pour un lacet γ ne passant pas par 0 et tel que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$.

Devoir Maison

Correction 1 **Première partie : Equation de Bessel**

I-a) L'application $(t,Y)\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{t^2-n^2}{t^2} & \frac{-1}{t}\end{pmatrix} Y$ appartient à $\mathcal{C}^1(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Elle est même linéaire en Y. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz qui dit que (2) admet une unique solution $Y\in\mathcal{C}^1(]t_0-\delta,t_0+\delta[;\mathbb{R}^2)$ pour tout $(t_0,Y_0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ pourvu que $\delta>0$ soit assez petit (existence et unicité locale).

I-b) On a

$$\begin{aligned} |Y_1'(t)| &= |Y_2(t)| \leq \|Y(t)\|_{\mathbb{R}^2} \\ |Y_2'(t)| &\leq \frac{|t^2-n^2|}{t^2}|Y_1(t)| + \frac{1}{t}|Y_2(t)| \leq (1+\frac{1}{t})\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^2}\,. \end{aligned}$$

En prenant le maximum des deux lignes on obtient

$$\|Y'(t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq (1+\frac{1}{t})\|Y\|_{\mathbb{R}^2} \leq \frac{1}{t})\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^2}\,.$$

I-c) Le lemme de Gronwall donné en cours permet d'écrire pour $t>t_0$

$$\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq e^{\int_{t_0}^{t}(1+\frac{1}{s})\ ds}\|Y_0\|\,.$$

De même pour $t>0$, $t<t_0$, on a

$$\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^2} \leq e^{\int_{t}^{t_0}(1+\frac{1}{s})\ ds}\|Y_0\|_{\mathbb{R}^2}\,.$$

I-d) Le théorème des bouts nous dit alors que pour tout Y_0 et tout $t_0>0$, l'intervalle maximal d'existence et d'unicité du problème de Cauchy (2) contient $]0,+\infty[$. Plus précisément si l'intervalle maximal a pour borne supérieure $T^+\in]0,+\infty[$, on doit avoir $\lim_{t\to T^+}\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^2}=+\infty$ ce qui n'est pas possible pour $T_+<+\infty$ en vertu de I-b). De même la borne inférieure $T^-\in]0,t_0[$ ne peut être que 0.

I-e) Comme l'équation différentielle (1) est linéaire on sait que l'ensemble des solutions S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[;\mathbb{R})$. A $y\in S$ solution de l'équation différentielle, on peut associer $(y(1),y'(1))\in\mathbb{R}^2$ et cela définit une application linéaire de S dans $\mathbb{R}^2$. Les questions précédentes a)b)c) avec $t_0=1$ nous assurent qu'à toute donnée intitiale $Y_0=(y(1),y'(1))\in\mathbb{R}^2$ correspond une unique solution $y\in S$. Ainsi l'application $y\in S\mapsto(y(1),y'(1))\in\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et S est un espace vectoriel de dimension 2.

Deuxième partie : Solution développable en série entière

II-a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'application $u \mapsto e^{inu - z\sin(u)}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ et donc mesurable et intégrable.

Pour (presque) tout $u \in [-\pi, \pi]$ l'application $z \mapsto e^{i(nu - z\sin u)} = e^{inu}e^{i\sin(u)z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, car l'exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Enfin si $z \in D(0, R)$, avec $R > 0$ on a

$$|e^{i(nu - z\sin(u))}| = e^{\mathbb{R}\mathrm{e}\,(i(nu - z\sin(u)))} = e^{\sin(u)\mathrm{Im}z} \leq e^R$$

et la constante e^R est intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

Les trois conditions du théorème de Lebesgue holomorphe sont vérifiées pour dire que

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu - z\sin(u))}\, du$$

est une fonction holomorphe sur $D(0, R)$, pour tout $R > 0$, et donc sur $\mathbb{C}$.

On sait de plus que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$J_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-i\sin(u))^k e^{i(nu - z\sin(u))}\, du\,.$$

II-b)

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(nu - z\sin(u))}\, du \overset{u'=-u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i((-n)u' - (-z)\sin(u'))}\, du' = J_{-n}(-z)\,.$$

II-c) On utilise l'expression de $J_n'(z)$ trouvée au II-a) et on fait les intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
zJ_n'(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-iz\sin(u))e^{i(nu - z\sin(u))}\, du \\
&\overset{-\sin(u)=(\cos(u))'}{=} \left[iz\cos(u)e^{i(nu - z\sin(u))}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (iz\cos(u)) \times (i(n - z\cos(u)))e^{i(nu - z\sin(u))}\, du \\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z^2\cos^2(u)e^{i(nu - z\sin(u))}\, du + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ne^{inu}\underbrace{(-iz\cos(u))e^{-iz\sin(u)}}_{=(e^{-iz\sin(u)})'}\, du \\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z^2\cos^2(u)e^{i(nu - z\sin(u))}\, du + \frac{i}{2\pi}\left[-ne^{inu}e^{-iz\sin(u)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&\qquad - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} in^2e^{inu}e^{-iz\sin(u)}\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (n^2 - z^2\cos^2(u))e^{i(nu - z\sin(u))}\, du\,.
\end{aligned}$$

II-d) La dérivée seconde de J_n est donnée par

$$J_n''(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-i\sin(u))^2 e^{i(nu - z\sin(u))}\, du\,.$$

Avec la question précédente on calcule donc

$$z^2J_n'' + zJ_n' + (z^2 - n^2)J_n = \int_0^{\pi} [-z^2\sin^2(u) + (n^2 - z^2\cos^2(u)) + (z^2 - n^2)]e^{i(nu - z\sin(u)))}\, du = 0\,.$$

Comme J_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$ elle est analytique sur $\mathbb{C}$ (développable en série entière au voisinage de tout point) et donc analytique sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie l'équation différentielle

$$t^2 J_n'' + t J_n' + (t^2 - n^2) J_n = 0\,.$$

Cela donne donc une solution de (1) qui est développable en série entière au voisinage de $t = 0$. Pour donner le rayon de convergence on peut renvoyer au cours ou reprendre la démonstration qui consite à écrire

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_n^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

avec

$$c_k = \frac{J_n^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \frac{J_n(z)}{z^{k+1}}\, dz$$

et

$$|c_k| = |\frac{J_n^{(k)}(0)}{k!}| \leq \frac{\max_{|z \leq R|} |J_n(z)|}{R^k} = \frac{M_R}{R^k}\,.$$

Le critère de Cauchy avec $\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} \leq \frac{1}{R}$ nous assure alors que le rayon de convergence est plus grand que R, ce pour tout $R > 0$. Ainsi ce rayon de convergence est $+\infty$.

II-e) On met l'expression $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ dans l'équation et on obtient

$$\left[\sum_{k=2}^{+\infty} c_k k(k-1) t^k\right] + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} c_k k t^k\right] + \left[\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+2}\right] - n^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\right] = 0$$

ou encore

$$\sum_{k=2}^{+\infty} [c_k \underbrace{(k(k-1) + k - n^2)}_{=k^2-n^2} + c_{k-2}] t^k + c_1(1-n^2)t - n^2 c_0 = 0\,.$$

On voit que cela donne

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0\,.$$

Pour $k = n$ l'équation s'écrit $0 c_n = -c_{n-2} = 0$ et $c_n \in \mathbb{C}$ quelconque convient. Ensuite pour $k > n$ on a $c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2-n^2}$. Si $k = n + 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$ alors $c_{n+2p+1} = 0$ et si $k = n + 2p$ alors

$$c_{n+2p} = -\frac{c_{n+2(p-1)}}{(n+n+2p)(n+2p-n)} = -\frac{c_{n+2(p-1)}}{2^2(n+p)p} = \frac{(-1)^p c_n}{2^{2p} \frac{(n+p)!}{n!} p!} = \frac{(-1)^p n! c_n}{2^{2p}(n+p)!p!}$$

En posant $a_k = c_{n+k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ on obtient

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p+1 \\ \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}(n+p)!p!} & \text{si } k = 2p\,, \end{cases}$$

et

$$J_n(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = z^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p n!}{2^{2p}(n+p)!p!} z^{2p}\,.$$

II-f) Le théorème de Lebesgue holomorphe nous dit

$$J_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-i\sin(u))^k e^{i(nu - z\sin(u))}\, du\,,$$

et avec la périodicité en u

$$J_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(-i\sin(u))^k e^{i(nu - z\sin(u))}\, du\,.$$

En particulier

$$J_n^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-i\sin(u))^k e^{inu}\, du\,.$$

Regardons le cas particulier $k = n$. On obtient

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}(\frac{e^{-iu} - e^{iu}}{2})^n\, du = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi\times 2^n}\int_{-\pi}^{\pi} C_n^k e^{inu} e^{-iku} e^{i(n-k)u}\, du\,.$$

Or $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2n-2k)u}\, du$ vaut 0 si $k \neq n$ et 2π si $k = n$. On aboutit à

$$J^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}\,.$$

En écrivant

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_n^{(k)}(0)}{k!}z^k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p a_0 n!}{2^{2p}p!(n+p)!}z^{2p+n}\,.$$

l'identification des coefficients donne

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{J_n^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2^n n!}\,,\\
&J_n^{(n+2p+1)}(0) = 0\,,\\
&J_n^{(n+2p)}(0) = (n+2p)!\frac{(-1)^p a_0 n!}{2^{2p}p!(n+p)!} = \frac{(-1)^p (n+2p)!}{2^{n+2p}p!(n+p)!} = (-1)^p C_{n+2p}^p 2^{-(n+2p)}\,.
\end{aligned}$$

En traduisant cela en terme de $\int_0^{2\pi}(\sin(u))^k e^{inu}\, du$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}(\sin(u))^{n+2p+1}e^{inu}\, du = 0\\
&\int_0^{2\pi}(\sin(u))^{n+2p}e^{inu}\, du = (2\pi)(i)^{n+2p}J_n^{(n+2p)}(0) = (2\pi)i^n C_{n+2p}^p\,.
\end{aligned}$$

Enfin comme le développement en série entière de $J_n(z)$ ne contient que des termes qui ont la même parité que n, on en déduit que

$$(-1)^n J_n(z) = J_n(-z) = J_{-n}(z)$$

où la dernière égalité a été établie au II-b).

II-g) Comme J_n est holomorphe et non nulle ses zéros sont isolés et elle est continue. Pour $n = 0$, on sait que $J_0(0) = 1$ et on peut trouver $\delta > 0$ tel que $J_0(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, \delta[$. Pour $n \neq 0$, 0 est un zéro isolé de J_n et il existe $\delta > 0$ tel que $J_n(t) \neq 0$ pour tout $t \in]0, \delta[$. En fait en regardant le premier terme non nul de la série entière, on sait même que $J_n(t) > 0$ pour $t \in]0, \delta[$.

On fixe donc $t_0 \in]0, \delta[$ tel que $J_n(t_0) \neq 0$. On sait que l'espace des solutions de (1) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est un espace de dimension 2 et que deux solutions f, g sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien en t_0,

$$W(f,g)(t_0) = f'(t_0)g(t_0) - f(t_0)g'(t_0)$$

est non nul. Si on note Y_n la solution de (1) avec $Y_n(t_0) = 0$ et $Y_n'(t_0) = 1$, le wronskien vaut

$$W(J_n, Y_n) = J_n'(t_0)Y_n(t_0) - J_n(t_0)Y_n'(t_0) = -J_n(t_0) \neq 0 .$$

Ainsi (J_n, Y_n) est une base de S.

II-h) Comme Y_n et J_n sont $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et comme J_n ne s'annule pas sur $]0, \delta[$, il en est de même pour $F_n = \frac{Y_n}{J_n}$. En posant $Y_n = F_n J_n$ on obtient

$$0 = t^2 Y_n'' + tY_n' + (t^2 - n^2)Y_n = F_n \underbrace{(t^2 J_n'' + tJ_n' + (t^2 - n^2)J_n)}_{=0} + t^2 F_n'' J_n + (2t^2 J_n' + tJ_n)F_n' .$$

Ainsi F_n' est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$t^2 J_n (F_n')' + (2t^2 J_n' + tJ_n)F_n' = 0 .$$

II-i) On remarque que comme J_n est réelle et ne s'annule pas sur $]0, \delta[$ et que $F_n'(t_0) = \frac{Y_n'(t_0)}{J_n(t_0)} = \frac{1}{J_n(t_0)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz local impose que F_n' est réelle et ne s'annule pas sur $]0, \delta[$. Par ailleurs on sait que $F_n'(t_0) = \frac{1}{J_n(t_0)} > 0$ et $|F_n'(t)| = F_n'(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \delta[$. On peut donc écrire pour tout $t \in]0, \delta[$,

$$\frac{F_n''(t)}{F_n'(t)} = -\frac{2t^2 J_n'(t) + tJ_n(t)}{t^2 J_n(t)} .$$

Le développement en série entière de J_n donne les asymptotiques suivantes

$$J_n(t) = a_0 t^n + \mathcal{O}(t^{n+2}) \quad , \quad J_n'(t) = n a_0 t^{n-1} + \mathcal{O}(t^{n+1}) .$$

Par conséquent

$$\frac{F_n''(t)}{F_n'(t)} = -\frac{2n a_0 t^{n+1} + a_0 t^{n+1} + \mathcal{O}(t^{n+3})}{a_0 t^{n+2} + \mathcal{O}(t^{n+4})} = -\frac{2n+1}{t} + \mathcal{O}(t) .$$

Autrement dit

$$\frac{F_n''(t)}{F_n'(t)} + \frac{2n+1}{t} = \mathcal{O}(t)$$

est une fonction continue sur $[0, \delta[$. Sa primitive qui s'annule en 0 diffère de $\log(t^{2n+1}F_n'(t))$ par une constante et est un $\mathcal{O}(t^2)$ quand $t \to 0$: Il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\log(t^{2n+1}F_n'(t)) = c_0 + \mathcal{O}(t^2) .$$

En passant à l'exponentielle on obtient

$$t^{2n+1}F_n'(t) = e^{c_0 + \mathcal{O}(t^2)} = e^{c_0}(1 + \mathcal{O}(t)) .$$

En posant $C = e^{c_0}$ on aboutit à

$$F_n'(t) \sim \frac{C}{t^{2n+1}} \quad \text{quand } t \to 0^+ .$$

Maintenant on utilise à nouveau $F_n(t_0) = 0$ et en intégrant de t_0 à t :

$$F_n(t) = \int_{t_0}^{t} F_n'(s)\ ds \sim \frac{C}{(2n+1)t^{2n}} \quad \text{quand } t \to 0^+ ,$$

et finalement

$$Y_n(t) \sim \frac{Ca_0}{(2n+1)t^n} .$$

II-j) Si f est une solution générale de (1) sur $]0,+\infty[$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(t) = \alpha Y_n(t) + \beta J_n(t) .$$

Comme $J_n(t)$ est continue en 0 et $\lim_{t\to 0^+} |Y_n(t)| = +\infty$ pour $n > 0$. On en déduit $\lim_{t\to 0^+} |f(t)| = +\infty$ dès que $\alpha \neq 0$. Ainsi les seuls éléments de S dont l'intervalle maximal est plus grand que $]0,+\infty[$ sont les éléments colinéaires à J_n.

Troisième partie : Fonction génératrice

III-a) Pour $x \in \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto e^{\frac{x}{2}z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par composition l'applications $z \mapsto e^{-\frac{x}{2}\times\frac{1}{z}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. En faisant le produit $\varphi_x(z) = e^{\frac{x}{2}(z-1/z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

III-b) Si γ_2 et γ_1 sont deux contours de $\mathbb{C}$ ne passant pas par 0 tels que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$ alors le contour $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ est un contour de $\Omega = \mathbb{C}^*$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\Omega = \{0\} , \quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 .$$

Comme φ_x est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}^*$ on peut appliquer le théorème de Cauchy global qui dit

$$\int_{\gamma_1} \varphi_x(z)\ dz - \int_{\gamma_2} \varphi_x(z) dz = \int_\gamma \varphi_x(z)\ dz = 0 .$$

III-c) La fonction φ_x est holomophe sur $\mathbb{C}^*$ et a une singularité en 0. Si elle était méromorphe il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $z^N\varphi_x(z)$ reste borné au voisinage de 0. C'est vrai pour $x = 0$. Pour $x \neq 0$ il suffit de prendre $z = xt$, $t \in \mathbb{R}^*$, et on a

$$\varphi_x(xt) = e^{\frac{x^2}{2}t} \times e^{-\frac{1}{2t}}$$

et

$$|xt|^N|\varphi_x(xt)| \sim |x|^N t^N e^{-\frac{1}{2t}} \overset{t\to 0^-}{\to} +\infty .$$

Pour $x \neq 0$, φ_x a une singularité essentielle en 0.

III-d) Pour $r \leq |z| \leq R$ on a $\frac{|xz|}{2} \leq \frac{R|x|}{2}$ et $\left|\frac{x}{2z}\right| \leq \frac{1}{2r}$ de telle sorte que

$$\left|\frac{(xz/2)^{n_1}}{n_1!}\frac{(x/(2z))^{n_2}}{n_2!}\right| \leq \frac{(R|x|/2)^{n_1}}{n_1!}\frac{(|x|/(2r))^{n_2}}{n_2!} .$$

Avec
$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{(R|x|/2)^{n_1}}{n_1!}\frac{(|x|/(2r))^{n_2}}{n_2!}=e^{R|x|/2}e^{|x|/(2r)}<+\infty\,,$$
on en déduit que la série
$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{(xz/2)^{n_1}}{n_1!}\frac{(x/(2z))^{n_2}}{n_2!}$$
converge normalement. L'application de Fubini pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ assure que la somme de cette double série est $\varphi_x(z)$.

III-e) La convergence normale contient la convergence absolue de la double série pour tout z tel que $r\leq|z|\leq R$. On sait alors que l'on peut permuter et regrouper les termes comme on veut dans la série. On peut donc regrouper les termes de telle sorte que $n_1-n_2=n\in\mathbb{Z}$, $n_1=n+n_2\geq n$. On obtient alors
$$\varphi_x(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{n_1\geq n}z^n\frac{(x/2)^{n_1}}{n_1!}\frac{(-1)^{n_1-n}(x/2)^{n_1-n}}{(n_1-n)!}\,.$$
Il suffit de poser $n_1=n'$ et on obtient
$$\varphi_x(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{n'\geq n}\frac{(x/2)^{2n'-n}(-1)^{n'-n}}{n'(n'-n)!}\right]z^n\,.$$
avec convergence normale dans $\{z\in\mathbb{C}\,,r\leq|z|\leq R\}$ pour tout $0<r<R<+\infty$.

III-f) Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets d'indice 1 par rapport à 0, alors
$$\int_{\gamma_1}\frac{\varphi_x(z)}{z^{n+1}}\,dz=\int_{\gamma_2}\frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\,ds\,,$$
par le même raisonnement qu'au III-b) appliqué maintenant à la fonction $\frac{\varphi_x(z)}{z^{n+1}}$ holomorphe dans $\mathbb{C}^*$. Donc l'intégrale de contour $\oint\frac{\varphi_x(z)}{z^{n+1}}\,dz$ est bien définie. On peut prendre en particulier le contour donné par $z=e^{iu}$, $u\in[-\pi,\pi]$, et on obtient
$$\frac{1}{2i\pi}\oint\frac{\varphi_x(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix/2\sin(u)}}{e^{i(n+1)u}}\,e^{iu}idu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(-nu-x\sin(u))}\,du=J_{-n}(x)$$
Maintenant la convergence normale
$$e^{x/2(z-1/z)}=\varphi_x(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{n'\geq n}\frac{(x/2)^{2n'-n}(-1)^{n'-n}}{n'!(n-n')!}\right]z^n$$
sur le cercle unité, assure pour $N\in\mathbb{Z}$ la convergence normale de
$$\frac{e^{x/2(z-1/z)}}{z^{N+1}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\sum_{n'\geq n}\frac{(x/2)^{2n'-n}(-1)^{n'-n}}{n'!(n-n')!}\right]z^{n-N-1}$$
sur le cercle unité. On peut donc permuter sommation de la série et intégration sur le cercle unité. Mésalor
$$\frac{1}{2i\pi}\oint z^{n-N-1}\,dz=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-N)u}\,du=\delta_{nN}\,,$$
donne
$$\left[\sum_{n'\geq n}\frac{(x/2)^{2n'-n}(-1)^{n'-n}}{n'!(n-n')!}\right]=\frac{1}{2i\pi}\oint\frac{e^{x/2(z-1/z)}}{z^{n+1}}\,dz=J_{-n}(x)\,,$$
ce qui permet de conclure.