Devoir maison 2

Exercice 1 Dites si les fonctions suivantes sont holomorphes sur leur domaine de définition :

$$(i)\quad \frac{e^z}{z^3} \quad (ii) \quad \frac{z}{z^2+1} \quad (iii) \quad \overline{z} \quad (iv) \quad e^{1/(z^2+3z)} \quad (v) \quad \mathrm{Re}(z)\,.$$

Parmi ces fonctions lesquelles définissent des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$?
Pour les fonctions ci-dessus qui sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ déterminez les pôles et les résidus en ces pôles.

Exercice 2 Soient γ_1 et γ_2 deux lacets dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)|\ .$$

Montrer que ces deux lacets sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.
Indication : Considérez $H(s,t) = (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ $s \in [0,1]$ *et par l'absurde vérifiez que* $H(s_0,t) = 0$ *est impossible.*

Exercice 3 L'objectif de cet exercice est de faire réfléchir avec des arguments d'abord élémentaires au logarithme complexe.
Tâchons de répondre à une question toute simple :

Que vaut $\log(-1)$?

1. Supposons que la formule $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ est valable également pour les nombres négatifs. Quelle valeur trouvez-vous pour $\log(-1)$?
2. Partons maintenant de la formule qui définit le logarithme :
$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\ .$$
On voudrait naturellement l'appliquer pour calculer $\log(-1)$. Quel est le problème ?
3. On peut peut-être éviter ce problème en calculant une valeur principale « à la Cauchy », en posant
$$\log(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_1^{\epsilon} \frac{1}{t}\, dt + \int_{-\epsilon}^{x} \frac{1}{t}\, dt \right)\ .$$
Qu'obtenez-vous pour $\log(-1)$? Ce résultat est-il compatible avec ce que vous avez trouvé en (a) ?
4. Les résultats que vous venez d'obtenir vous paraissent peut-être convaincants. Sont-ils compatibles avec l'identité
$$x = e^{\log(x)}\ ?$$
5. Vous disposez de nouveaux outils pour *contourner* le problème : Définissez le logarithme de par $\log(-1) = \int_\gamma \frac{dz}{z}$ où γ est un chemin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ allant de 1 à -1. Que trouve-t-on si $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,\pi]$, le demi-cercle supérieur ? et pour $\gamma(t) = e^{-it}$, $t \in [0,\pi]$, le demi-cercle inférieur ?
6. Les valeurs obtenues en 5) contredisent-elles le théorème d'invariance par homotopie pour l'intégrale sur un chemin d'une fonction holomorphe ? Pourquoi ?

7. Les valeurs obtenues en 5) pour $\log(-1)$ sont-elles compatibles entre elles ? Avec celle obtenue en 1) et 3) ? Calculez maintenant $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz$ pour $\gamma_1(t) = e^{it}$, $t \in [0, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$ et $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz$ pour $\gamma_2(t) = e^{-it}$, $t \in [0, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$. Combien avez-vous de valeurs différentes pour $\log(-1)$?
8. Une *détermination du logarithme* est une fonction *continue* f d'une variable complexe z, définie sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0, telle que

$$\forall\, z \in \Omega, \quad e^{f(z)} = z\ .$$

Soit Ω un ouvert connexe ne contenant pas 0. Montrer que si f et g sont deux déterminations du logarithme sur Ω, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall z \in \Omega\,, g(z) = f(z) + 2\pi i k$. Expliquer en particulier pourquoi $k \in \mathbb{Z}$ ne dépend pas de $z \in \Omega$.

9. Montrer qu'il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. *Indication : On prendra la détermination du continue du logarithme sur* $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ *donnée par* $f_+(re^{i\theta}) = \log(re^{i\theta}) = r + i\theta$ *pour* $\theta \in]-\pi, \pi[$. *En supposant que* f *est une détermination continue du logarithme sur* $\mathbb{C}^*$ *on compare* f *avec* f_+ *sur* $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ *d'après 8) et on regarde* $\lim_{\theta \to \pm\pi} f(e^{i\theta})$.
10. Cependant, il existe une détermination du logarithme sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ que l'on dit *principale*. Nous allons la construire.
    (a) On se retreint à l'ouvert $U = \{x + iy \mid x > 0\}$, et on y définit la fonction $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$. Déterminer l'unique fonction $v(x, y)$ telle que $g = u+iv$ soit holomorphe sur U et telle que $g(1) = 0$.
    (b) Que se passe-t-il lorsque $y = 0$? Sommes-nous sur la bonne voie ?
    (c) Déterminer r et θ tels que l'on puisse écrire $g(z) = \log(r) + i\theta$. Déduire que pour tout $z \in U$,

$$e^{g(z)} = z\ .$$

    En fait, nous aurions pu déduire cette égalité sans calcul. Comment ? *Indication : se servir du théorème des zéros isolés.*
    (d) Pour $z = x + iy \in \Omega$ on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\ ,$$

    et on définit la fonction

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\theta\ .$$

    Montrer que $\mathrm{Log}(z)$ est bien holomorphe sur Ω et qu'elle est sur cet ouvert l'unique primitive de $1/z$ s'annulant en 1.
    (e) Soit $\epsilon > 0$. Calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Log}(-1 + i\epsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Log}(-1 - i\epsilon)\ .$$

    Que remarquez-vous ?
11. Vérifiez que la détermination principale du logarithme Log est un biholomorphisme de $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ sur $\mathbb{R}\times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{C}$.
12. Surface de Riemann du logarithme : Nous notons $\widehat{\mathbb{C}^*}$ l'ensemble $\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}$ muni de la topologie suivante :
    — Pour $(z_0, k) \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ tel que $z_0 \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ les boules de rayon $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min(|z_0|, d(z_0,]-\infty, 0]))$, sont données par $B((z_0, k), \varepsilon) = \{(z, k)\,, |z - z_0| < \varepsilon\}$;
    — Pour $z_0 \in]-\infty, 0[$ et $k \in \mathbb{Z}$, la boule de rayon $\varepsilon < |z_0|$ est donnée par

$$B((z_0, k), \varepsilon) = \{(z, k)\,, |z - z_0| < \varepsilon\,, \mathrm{Im}\ z > 0\} \cup \{(z, k-1), |z - z_0| < \varepsilon, \mathrm{Im}\ z < 0\}\ .$$

(a) Prenez une feuille de papier et découpez 3 exemplaires d'une couronne représentant $\{z \in \mathbb{C}, 1/2 < |z| < 2\}$. Coupez ces 3 couronnes le long de $[-2, -1/2]$. La première représente l'ensemble des $(z, 0)$, $1/2 < |z| < 2$, la deuxième l'ensemble des $(z, 1)$, $1/2 < z < 2$ et la troisième l'ensemble des $(z, 2)$, $1/2 < z < 2$. Collez ces 3 couronnes suivant la topologie de $\widehat{\mathbb{C}^*}$. Visualisez un chemin continu $\gamma(t) = (z(t), k(t))$, $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$, allant de $(1, 0)$ à $(1, 2)$ et dessinez le (juste le chemin) en perspective sur votre copie, en mettant $(1, k)$ sur le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1, 0, k)$.

(b) En étudiant ce qui se passe aux points de raccord, $(x + i0^+, k) = (x + i0^-, k - 1)$, $x \in]-\infty, 0[$, montrer qu'il existe une application continue sur $\widehat{\mathbb{C}^*}$, $\widehat{\mathrm{Log}} : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$, dont la restriction sur $\Omega_k = \{(z, k), z \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]\}$, $k \in \mathbb{Z}$ est donnée par

$$\widehat{\mathrm{Log}}(z, k) = 2ik\pi + \mathrm{Log}(z) \in \mathbb{R} \times](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[\,.$$

(c) Si $\Pi : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}^*$ est donnée par $\Pi(z, k) = z$, que vaut $\Pi(\widehat{\mathrm{Log}}^{-1}(u))$ pour $u \in \mathbb{C}$?

(d) Montrer que $\widehat{\mathrm{Log}}$ est un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}^*}$ sur $\mathbb{C}$.

Devoir maison 2

Correction 1 **i)** On écrit $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ pour $z \in \mathbb{C}$, ce qui donne le développement de Laurent $\frac{e^z}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+3)!}$. Cette fonction est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle d'ordre 3 en $z = 0$ et le résidu $\frac{1}{(-1+3)!} = \frac{1}{2}$.

ii) $\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}$. Elle est méromorphe avec deux pôles simples en $z = +i$ et $z = -i$. Les résidus en ces points sont Rés $(\frac{z}{z^2+1}, +i) = \frac{i}{(i+i)} = \frac{1}{2}$ et Rés $(\frac{z}{z^2+1}, -i) = \frac{-i}{(-i-i)} = \frac{1}{2}$.

iii) $\partial_{\overline{z}}\overline{z} = 1$ et cette fonction n'est jamais holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et elle n'est donc pas méromorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

iv) $e^{\frac{1}{z^2+3z}} = e^{\frac{1}{z(z+3)}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, -3\}$. Elle admet des singularités essentielles en $z = 0$ et $z = -3$ car $|t|^N e^{\frac{1}{t(t+3)}} \to +\infty$ quand $t \to 0^+$ et $|t+3|^N e^{\frac{1}{t(t+3)}} \to +\infty$ quand $t \to -3^-$.

v) $\partial_{\overline{z}}\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ et Re z n'est holomorphe sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$. Elle n'est méromorphe sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

Correction 2 On suit l'indication. Si il existe $(s_0, t) \in [0,1] \times [0,1]$ tel que $H(s_0, t) = 0$ alors

$$s_0|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| = |\gamma_1(t)| \quad \text{et} \quad (1-s_0)|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| = |\gamma_2(t)|\,.$$

Mais la somme de ces deux égalités contredit

$$\forall t \in [0,1]\,, |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)|\,.$$

Ainsi $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ est une homotopie de γ_1 (pour $s = 0$) à γ_2 (pour $s = 1$) qui reste dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Correction 3 1. On écrit $\log((-1)\times(-1)) = \log(1) = 2\log(-1)$ et on trouve $\log(-1) = 0$.

2. Si on prend $\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ le problème est que $\frac{1}{t}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 et donc l'intégrale n'est pas définie pour $x < 0$.
3. Si on utilise la valeur principale à la « Cauchy » on trouve
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_1^{\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_{-\varepsilon}^{x} \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\log(t)]_1^{\varepsilon} + [\log|t|]_{-\varepsilon}^{x} = \log(|x|)\,.$$
Pour $x = -1$ on trouve $\log(-1) = 0$ ce qui est la même valeur qu'à la première question.
4. Non $\log(-1) = 0$ nous donne $e^{\log(-1)} = e^0 = 1 \neq -1$. Ce n'est donc pas une « bonne définition » du logarithme complexe si on veut « inverser » l'exponentielle.
5. Avec $\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$, on trouve
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = +i\pi\,.$$
Avec $\gamma(t) = e^{-it}$ pour $t \in [0, \pi]$ on trouve
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{-ie^{-it}dt}{e^{-it}} = -i\pi\,.$$

6. Non il n'y a pas de contradiction car $z \to \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $\gamma_+(t) = e^{it}$ et $\gamma_-(t) = e^{-it}$, $t \in [0,\pi]$, s'ils sont homotopes dans $\mathbb{C}$, ne sont pas homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
7. Les valeurs obtenues pour $\log(-1)$ au 5) sont différentes mais leur différence est égale à $2i\pi$. Donc l'exponentielle de ces deux valeurs donnent le même résultat. Si on prend $\gamma_1(t) = e^{it}$ pour $t \in [0,(2k+1)\pi]$ on obtient

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{(2k+1)\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i(2k+1)\pi\,.$$

Pour $\gamma_2(t) = e^{-it}$, $t \in [0,(2k+1)\pi]$, on obtient

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{2k+1} \frac{-ie^{-it}dt}{e^{-it}} = -i(2k+1)\pi\,.$$

On obtient donc une infinité de valeurs, toutes les nombres de $i\pi + 2i\pi\mathbb{Z}$, pour $\log(-1)$.
8. Si Ω est un ouvert connexe et f et g sont deux fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall z \in \Omega\,, e^{f(z)} = z = e^{g(z)}\,,$$

alors $e^{f(z)} = e^{g(z)}$ implique $f(z) - g(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Ainsi $g - f$ est une fonction continue de Ω connexe à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$ qui est discret. Cela implique que $g - f$ est constante. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall z \in \Omega\,, \quad g(z) = f(z) + 2ik\pi\,.$$

9. La fonction $f_+(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$ est continue sur $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Si f est une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, alors $f\big|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-}$ est une fonction continue telle que

$$\forall z \in \Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-\,, \quad e^{f(z)} = z = e^{f_+(z)}\,.$$

Comme $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ est connexe (il est étoilé en 1), la question 8 nous dit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que

$$\forall z \in \Omega\setminus\mathbb{R}_-\,, \quad f(z) = f_+(z) + 2ik\pi\,.$$

Mais alors on obtient

$$\begin{aligned} &\lim_{\theta\to+\pi} f(e^{i\theta}) = \lim_{\theta\to+\pi} f_+(e^{i\theta}) + 2ik\pi = i(2k+1)\pi \\ \text{et} \quad &\lim_{\theta\to-\pi} f(e^{i\theta}) = \lim_{\theta\to-\pi} f_+(e^{i\theta}) + 2ik\pi = i(2k-1)\pi \neq i(2k+1)\pi\,. \end{aligned}$$

La fonction f n'est pas continue en $-1 = e^{i\pi}$. Il ne peut y avoir de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
10. (a) Si $g(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe sur U si et seulement si $u, v \in \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R})$ avec

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{et} \quad \partial_x v = -\partial_y u\,.$$

La première égalité donne $\partial_y v = \frac{x}{x^2+y^2}$ et

$$v(x,y) = v(x,0) + \int_0^y \frac{xdt}{x^2+t^2} = v(x,0) + \int_0^{y/x} \frac{ds}{1+s^2} = v(x,0) + \arctan(\frac{y}{x})\,.$$

La deuxième égalité donne

$$\partial_x v = \partial_x v(x,0) - \frac{1}{x^2+y^2} = -\partial_y u = -\frac{1}{x^2+y^2}$$

et donc $\partial_x v(x,0) = 0$. Avec $g(1) = 0$ et donc $v(1,0) = 0$ cela conduit à

$$g(x+iy) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan(\frac{y}{x})\,.$$

(b) Pour $y=0$ et $x>0$ on trouve

$$g(x)=\frac{1}{2}\log(x^2)=\log(x)\,.$$

La fonction g est donc bien un prolongement holomorphe sur $U=\{x+iy, x>0\}$ du logarithme défini sur $]0,+\infty[$.

(c) Si on pose $g(z)=\log(r)+i\theta$ pour $z=x+iy\in U$, on obtient

$$r=e^{u(x,y)}=e^{\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2+y^2}\quad\text{et}\quad \theta=v(x,y)=\arctan(\frac{y}{x})\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

Les nombres $r>0$ et $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ne sont rien d'autre que $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Par conséquent

$$\forall z\in U\,,\quad e^{g(z)}=re^{i\theta}=z\,.$$

Pour déduire cette égalité sans calcul, nous pouvions aussi utiliser le fait que $z\mapsto e^{g(z)}-z$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe U (U est convexe) telle que

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad e^{g(x)}-x=0\,.$$

Le théorème des zéros isolés implique alors que l'égalité $e^{g(z)}-z=0$ est vraie pour tout $z\in U$.

(d) Si on pose

$$\mathrm{Log}\,(z)=\log(\sqrt{x^2+y^2})+i2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

pour $x+iy\in\Omega=\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, alors $P,Q\in\mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ avec

$$\begin{aligned}
\partial_x P &= \frac{x}{x^2+y^2}\quad,\quad \partial_y P=\frac{y}{x^2+y^2}\,,\\
\partial_x Q &= -\frac{2y(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\times\frac{1}{1+\frac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}}=-\frac{2y(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})}{2(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2})}\\
\partial_x Q &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\partial_y P\\
\partial_y Q &= \frac{2(x+\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}})}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\times\frac{1}{1+\frac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\partial_x P\,.
\end{aligned}$$

Les relations de Cauchy-Riemann sont satisfaites et $\mathrm{Log}(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$ est holomorphe sur Ω. Par ailleurs les relations de Cauchy-Riemann avec $\partial_z=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)$ conduisent à

$$\partial_z\mathrm{Log}(x+iy)=\partial_x P+i\partial_x Q=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{\bar z}{|z|^2}=\frac{1}{z}\,.$$

Comme Ω est étoilé en 1 et donc simplement connexe, on sait qu'il existe une unique primitive holomorphe de $\frac{1}{z}$ sur Ω qui s'annule en 1. Le calcul précédent nous dit que cette unique primitive holomorphe est Log.

(e) On calcule

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Log}(-1+i\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(1+\varepsilon^2) + 2i\arctan\left(\frac{\varepsilon}{-1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) \\
&= 0 + 2i \times \frac{\pi}{2} = i\pi \\
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Log}(-1-i\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(1+\varepsilon^2) + 2i\arctan\left(\frac{-\varepsilon}{-1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) \\
&= 0 + 2i \times (-\frac{\pi}{2}) = -i\pi\,.
\end{aligned}$$

D'une part $e^{\mathrm{Log}(z)} - z$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe $\Omega = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ qui s'annule sur $]0, +\infty[$ et donc

$$\forall z \in \Omega\,, \quad e^{\mathrm{Log}(z)} = z\,.$$

De plus Log a une discontinuité de $2i\pi$ en -1 et même en tout point de $]-\infty, 0[$.

11. L'application Log est une fonction holomorphe injective sur l'ouvert connexe Ω. En effet $\mathrm{Log}(z_1) = \mathrm{Log}(z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \Omega$ implique $z_1 = e^{\mathrm{Log}(z_1)} = e^{\mathrm{Log}(z_2)} = z_2$. On sait alors que c'est un biholomorphisme de Ω sur l'image de Ω qui n'est rien d'autre que $\{(\log(r), \theta)\,, r > 0, \theta \in]-\pi, \pi[\} = \mathbb{R}\times]-\pi, \pi[$. On note que l'application réciproque n'est rien d'autre que $\exp : t + i\theta \in \mathbb{R}\times]-\pi, \pi[\to e^{t+i\theta} \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$.

12. (a) Le dessin représente deux tours d'une hélice qui fait monter d'un étage à chaque tour.

    (b) L'application $\widehat{\mathrm{Log}}$ est continue sur chaque Ω_k et la topologie de $\widehat{\mathbb{C}^*}$ est justement faite pour $\widehat{\mathrm{Log}}$ soit continue aux raccords le long de $\mathbb{R}_- \times \{k\}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

    (c) $\pi(\widehat{\mathrm{Log}}^{-1}(u)) = \mathrm{Log}^{-1}(u) = \exp(u)$.

    (d) Le point b) de cette question nous assure que $\widehat{\mathrm{Log}} : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ est continu. De plus $\widehat{\mathrm{Log}}$ est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}^*}$ sur $\mathbb{C}$, vu que c'est une bijection de $\Omega_k \cup \{(z, k)\,, z \in]-\infty, 0[\}$ sur $\mathbb{R}\times](2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$. La continuité de $\widehat{\mathrm{Log}}^{-1}$ sur $\mathbb{R}\times](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ vient de la continuité de l'application exponentielle (voir le c)). Ensuite la topologie de $\widehat{\mathbb{C}^*}$ et notamment les conditions de raccords de Ω_{k-1} avec Ω_k le long de $]-\infty, 0[$ assurent la continuité de $\widehat{\mathrm{Log}}^{-1}$ le long de $\mathbb{R} \times \{(2k-1)\pi\}$. L'application $\widehat{\mathrm{Log}}$ est donc un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{C}^*}$ sur $\mathbb{C}$.
    D'un point de vue topologique, on dit que $\widehat{\mathbb{C}^*}$ est le revêtement universel de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Du point de vue des fonctions holomorphes, on appelle $\widehat{\mathbb{C}^*}$ la surface de Riemann du logarithme, où chaque point a un voisinage qui correspond à un disque ouvert de $\mathbb{C}^*$. On peut donc définir et étudier des fonctions holomorphes sur $\widehat{\mathbb{C}^*}$.