L3 Analyse 6 - Devoir #1

Corrigé

Vendredi 29 mai 2020

Exercice # 1

a) Qu'est-ce qu'une fonction holomorphe ? Donnez une définition mathématique.

Voir la page 1 du Chapitre 2 des notes de cours (NC2).

b) Dites si les fonctions suivantes sont holomorphes sur leur domaine de définition :

$$(i) \quad \frac{e^z}{z} \quad (ii) \quad \frac{z}{z^2+1} \quad (iii) \quad \overline{z} \quad (iv) \quad e^{1/(z^2+3z)} \quad (v) \quad \mathrm{Re}(z)$$

Les fonctions i) et ii) sont des quotients de fonctions holomorphes donc elle sont holomorphes ; la fonction iv) est une composée de fonctions holomorphes donc holomorphe ; les fonctions iii) et v) ne vérifient nulle part les équations de Cauchy-Riemann donc ne sont pas holomorphes.

c) Montrer que toute fonction holomorphe à valeurs réelles est constante.

Voir le corrigé de l'exercice 2.1 à la page 2 du TD2. L'ouvert de définition de notre fonction doit évidemment être connexe.

d) Toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable, de dérivée holomorphe (une infinité de fois !). Elle est de plus analytique : elle est égale en chaque point à son développement en série de Taylor, et il suffit de dériver cette série terme à terme pour obtenir $f'(z)$. On se pose naturellement la question dans l'autre sens : est-ce que toute fonction holomorphe $f(z)$ admet une primitive holomorphe $F(z)$? Peut-on simplement intégrer sa série de Taylor terme à terme pour obtenir $F(z)$? Pourquoi ? Donnez au moins un exemple pour illustrer votre propos.

Le développement en série de Taylor d'une fonction est défini *localement* : il s'agit d'un développement *autour d'un point*, avec un certain rayon de convergence. Sur cet ouvert, on peut effectivement intégrer la série terme à terme et obtenir une primitive holomorphe : toute fonction holomorphe possède donc partout dans son ouvert de définition, *localement* une primitive holomorphe. La question est de savoir si ces primitives se recollent, et si oui, comment ! On sait par exemple que la fonction $1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, possède sur tout disque ouvert contenu dans $\mathbb{C}^*$ une primitive holomorphe donnée par l'intégration terme à terme de sa série de Taylor, mais ne possède pas de primitive holomorphe *globale* (sur $\mathbb{C}^*$ tout entier). Cet exemple est fait en détail aux pages 17 et 18 du cours de Michèle Audin. Donc, bien que toute fonction holomorphe admette localement une primitive holomorphe, elle n'en admet pas nécessairement globalement.

e) Donnez une condition suffisante pour qu'une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ admette une primitive holomorphe.

Considérer une fonction holomorphe définie sur un ouvert simplement connexe (i.e. un ouvert où tout lacet est homotope à un point).

f) Qu'est-ce qu'une homotopie entre chemins ? Donnez une définition mathématique.

Voir la page 48 du Chapitre 2 des notes de cours (NC2).

g) Énoncez le théorème d'invariance par homotopie pour l'intégrale sur un chemin γ d'une fonction holomorphe $\int_\gamma f(z)dz$. *Attention à mettre toutes les hypothèses !*

Un énoncé précis se trouve à la page 127 du polycopié de Jean-François Burnol.

Exercice # 2 On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \ .$$

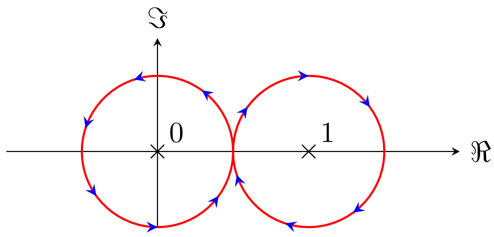
a) Dessinez le chemin

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2it} & 0 \leq t \leq \pi \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2it} & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases} ,$$

en indiquant son sens de parcours. Indiquez également les singularités de f. Puis, calculez

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz \ .$$

On trace d'abord la courbe et les deux pôles en $z = 0$ et $z = 1$.



Notons que la fonction f peut s'écrire

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \ .$$

Ainsi,

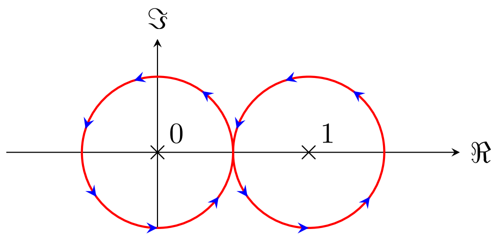
$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1}\ dz - \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\ dz = -2\pi i - (2\pi i) = -4\pi i \ .$$

On obtient ce résultat par calcul direct ou encore en utilisant le théorème des résidus. Ici, l'indice de γ_1 par rapport à $z = 0$ vaut 1 et l'indice de γ_1 par rapport à $z = 1$ vaut -1.

b) Faites de même avec le chemin

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2it} & 0 \leq t \leq \pi \\ 1 - \frac{1}{2}e^{2it} & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases} .$$

On trace d'abord la courbe et les deux pôles en $z = 0$ et $z = 1$.



Ici,

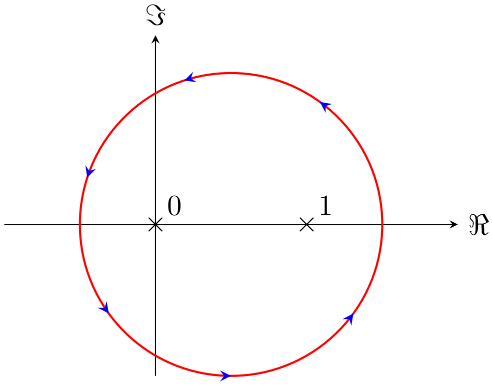
$$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1}\, dz - \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i - (2\pi i) = 0 \ .$$

On obtient ce résultat par calcul direct ou encore en utilisant le théorème des résidus. Ici, l'indice de γ_2 par rapport à $z = 0$ vaut 1 et l'indice de γ_2 par rapport à $z = 1$ vaut 1.

c) Faites de même avec le chemin

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{2} + ie^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

On trace d'abord la courbe et les deux pôles en $z = 0$ et $z = 1$.



Ici,

$$\int_{\gamma_3} f(z)\, dz = \int_{\gamma_3} \frac{1}{z-1}\, dz - \int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i - (2\pi i) = 0 \ .$$

On obtient ce résultat par calcul direct ou encore en utilisant le théorème des résidus. Ici, l'indice de γ_3 par rapport à $z = 0$ vaut 1 et l'indice de γ_3 par rapport à $z = 1$ vaut 1.

d) Pourquoi les résultats du b) et du c) sont-ils les mêmes ? Y a-t-il une raison conceptuelle pour cela ? Pourquoi le résultat du a) est-il différent des deux autres ? Y a-t-il une raison conceptuelle pour cela ?

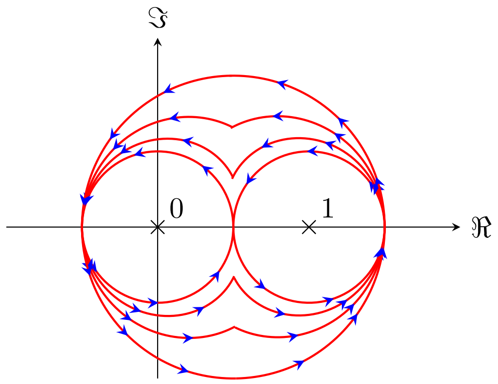
Les lacets γ_2 et γ_3 sont homotopes dans le domaine d'holomorphie de f ; le théorème de l'exercice 1 g) nous donne donc directement l'égalité entre les deux intégrales. Le lacet γ_1 est quant à lui homotopiquement distinct : on ne peut le déformer continûment en γ_2 ou γ_3 sans le faire passer par $z = 0$ ou $z = 1$, deux points où f n'est pas définie.

e) Écrivez explicitement une homotopie $H(s,t)$ entre $\gamma_2(t)$ et $\gamma_3(t)$, et esquissez-la (vous pouvez par exemple dessiner les courbes $H(0,t) = \gamma_2(t)$, $H(1/3,t)$, $H(2/3,t)$ et $H(1,t) = \gamma_3(t)$; des points seront accordés pour l'esthétisme !).

On peut prendre l'homotopie directe

$$H(s,t) = (1-s)\gamma_2(t) + s\gamma_3(t) \ .$$

On trace ensuite les 4 courbes demandées.



f) Soit $U = \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Montrer que pour tout lacet γ dans U, on a

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \ .$$

Pour tout lacet γ dans U, on a

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_\gamma(1) \ .$$

En effet, si on suppose que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) \neq \mathrm{Ind}_\gamma(1)$, alors γ doit nécessairement passer par un point de la droite reliant 0 et 1 (exercice !). Ainsi,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz - \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Ind}_\gamma(1) - \mathrm{Ind}_\gamma(0)\right) = 0 \ .$$

Exercice # 3 Soient γ_1 et γ_2 deux lacets dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)| \ .$$

Montrer que ces deux lacets sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Indice : écrivez une homotopie explicite entre γ_1 et γ_2.

Considérons l'homotopie directe

$$H(s,t) = (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$$

et montrons qu'elle est contenue dans $\mathbb{C}^*$. Supposons au contraire qu'il existe un couple $(s_0, t_0) \in]0,1[\times[0,1]$ tel que $H(s_0,t_0) = 0$. Alors, la longueur du segment de droite $\{H(s,t_0) \mid s \in [0,1]\}$, qui n'est autre que $|\gamma_1(t_0) - \gamma_2(t_0)|$, est égale à la somme $|\gamma_1(t_0)| + |\gamma_2(t_0)|$, ce qui contredit la condition d'inégalité stricte.

Exercice # 4 On se propose dans cet exercice de donner une preuve topologique du théorème de d'Alembert-Gauss. Supposons donc qu'il existe un polynôme complexe P de degré $n \geqslant 1$ et ne s'annulant pas. Quitte à diviser P par une constante, on suppose même que le coefficient dominant de P est 1.

a) Pour $r > 0$, on paramétrise le cercle de rayon r par $\gamma(t) = re^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que le lacet $P \circ \gamma$ est homotope au lacet constant égal à $P(0)$.

Il suffit que considérer l'homotopie

$$H(s,t) = P(s\gamma(t)) \ .$$

Par hypothèse (P ne s'annule pas), elle est toute entière contenue dans $\mathbb{C}^*$.

b) Montrer que, si r est assez grand, $P\circ\gamma$ est homotope au lacet γ^n dans $\mathbb{C}^*$. *Indice : utiliser l'exercice 3.*

Écrivons $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$, et choisissons $r >$max$\{\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|, 1\}$. Dès lors, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |P(\gamma(t)) - \gamma^n(t)| &= |a_0 + a_1 re^{it} + \ldots + a_{n-1}r^{n-1}e^{i(n-1)t}| \\ &\leq (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|)r^{n-1} \\ &< r^n \\ &< |P(\gamma(t))| + r^n \ . \end{aligned}$$

On conclut avec l'exercice 3.

c) En déduire deux calculs contradictoires de l'indice de $P \circ \gamma$ par rapport à 0.

L'indice par rapport à 0 d'un lacet de $\mathbb{C}^*$ est invariant par homotopie dans $\mathbb{C}^*$ (voir page 9 du Chapitre 3 des notes de cours NC3). Or, le a) nous donne $\text{Ind}_{P(\gamma)}(0) = \text{Ind}_{P(0)}(0) = 0$ alors que le b) nous donne $\text{Ind}_{P(\gamma)}(0) = \text{Ind}_{\gamma^n}(0) = n$, une contradiction.

Exercice # 5 Tâchons de répondre à une question toute simple que vous vous êtes possiblement déjà posée une fois plus ou moins sérieusement dans votre vie :

Que vaut $\log(-1)$?

a) Supposons que la formule $\log(xy) = \log(x)+\log(y)$ est valable également pour les nombres négatifs. Quelle valeur trouvez-vous pour $\log(-1)$?

On a $\log(-1) = \frac{1}{2}(\log(-1) + \log(-1)) = \frac{1}{2}\log(1) = 0$.

b) Partons maintenant de la formule définitoire du logarithme :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \ .$$

On voudrait naturellement l'appliquer pour calculer $\log(-1)$. Quel est le problème ?

La fonction $1/t$ n'est pas définie en zéro, l'intégrale n'a donc pas de sens.

c) On peut peut-être contourner ce problème en calculant une valeur principale « à la Cauchy », en posant

$$\log(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_1^{\epsilon} \frac{1}{t}\, dt + \int_{-\epsilon}^{x} \frac{1}{t}\, dt \right) \ .$$

Qu'obtenez-vous pour $\log(-1)$? Ce résultat est-il compatible avec ce que vous avez trouvé en (a) ?

On obtient en intégrant

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} (\log(\epsilon) + [\log|t|]_{-\epsilon}^{x}) = \log|x| \ ,$$

donc $\log(-1) = \log(1) = 0$, la même chose qu'au a).

d) Les résultats que vous venez d'obtenir vous paraissent peut-être convaincants. Sont-ils compatibles avec l'identité

$$x = e^{\log(x)} \ ?$$

Ces résultats sont incompatibles avec cette identité. En effet, dans ce cas $e^{\log(-1)} = e^0 = 1 \neq -1$. S'il l'on veut conserver les propriétés les plus naturelles du logarithme, il va donc falloir passer par un autre chemin...

e) Maintenant que vous connaissez un peu d'analyse complexe, vous disposez de nouveaux outils pour *contourner* le problème. Voyez-vous où je veux en venir ?

Sur la droite réelle, faire une intégrale entre 1 et -1 nous force à passer par 0 (il n'y a qu'un seul chemin). Par contre, en plongeant la droite réelle dans le plan complexe, il y a moyen d'intégrer entre 1 et -1 *en contournant le point 0* !

f) Posons $\gamma_1(t) = e^{it}$, avec $t \in [0, \pi]$. Calculez

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \ .$$

Un calcul direct donne πi.

g) Posons maintenant $\gamma_2(t) = e^{-it}$, avec $t \in [0, \pi]$. Calculez

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz \ .$$

Un calcul direct donne $-\pi i$.

h) Les valeurs obtenues en f) et en g) contredisent-elles le théorème d'invariance par homotopie pour l'intégrale sur un chemin d'une fonction holomorphe ? Pourquoi ?

Ces résultats ne contredisent pas le théorème. En effet, il est impossible de déformer continûment γ_1 en γ_2, en gardant les extrémités 1 et -1 fixées, sans passer par 0.

i) Les valeurs obtenues en f) et en g) pour $\log(-1)$ sont-elles compatibles entre elles ? Avec celle obtenue en a) et c) ? Calculez maintenant $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz$ pour $t \in [0, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$ et $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz$ pour $t \in [0, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$. Combien avez-vous de valeurs différentes pour $\log(-1)$?

Les valeurs obtenues en f) et g) ne sont pas compatibles entre elles. Elles ne sont pas non plus compatibles avec celle obtenue en a) et c). On obtient en calculant une infinité dénombrable de valeurs, soit les valeurs $\pi i + 2k\pi i$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

j) Une *détermination du logarithme* est une fonction *continue* f d'une variable complexe z, définie sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0, telle que

$$\forall\ z \in \Omega, \quad e^{f(z)} = z\ .$$

Soit Ω un ouvert connexe ne contenant pas 0. Montrer que si f est une détermination du logarithme sur Ω, alors toute autre détermination du logarithme sur Ω est de la forme $f + 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Montrer également que réciproquement, toute $f + 2\pi i k$ est une détermination du logarithme sur Ω.

Voir la Proposition I.4.4, page 16 des notes de cours de Michèle Audin.

k) Montrer qu'il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Voir la Proposition I.4.5, page 16 des notes de cours de Michèle Audin.

Morale de l'histoire : $\log(-1)$ *n'est défini qu'à* $2\pi i$ *près !*

l) Cependant, il existe une détermination du logarithme sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ que l'on dit *principale*. Nous allons la construire.

  i) On se retreint à l'ouvert $U = \{x + iy \mid x > 0\}$, et on y définit la fonction $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$. Déterminer l'unique fonction $v(x, y)$ telle que $g = u + iv$ soit holomorphe sur U et telle que $g(1) = 0$.

  L'intégration des équations de Cauchy-Riemann donne $v = \arctan(y/x)$.

ii) Que se passe-t-il lorsque $y = 0$? Sommes-nous sur la bonne voie ?

La restriction de $g(x, y)$ à la droite réelle donne $g(x, 0) = \log(x)$. Nous sommes donc en train d'*étendre* le logarithme que nous connaissons !

iii) Déterminer r et θ tels que l'on puisse écrire $g(z) = \log(r) + i\theta$. Déduire que pour tout $z \in U$,

$$e^{g(z)} = z \ .$$

En fait, nous aurions pu déduire cette égalité sans calcul. Comment ? *Indice : se servir du théorème du prolongement analytique.*

On pose directement $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(y/x)$ qui ne sont autre que les coordonnées polaires du point z. On obtient $e^{g(z)} = e^{\log(r)+i\theta} = re^{i\theta} = x + iy = z$. On aurait pu le dire à l'avance en se servant du théorème de prolongement analytique : les fonctions holomorphes $e^{g(z)}$ et z coïncidant sur la droite réelle, elles coïncident aussi dans tout l'ouvert connexe U.

iv) Pour $z = x + iy \in \Omega$ on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \ ,$$

et on définit la fonction

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\theta \ .$$

Montrer que $\mathrm{Log}(z)$ est bien holomorphe sur Ω et qu'elle est sur cet ouvert l'unique primitive de $1/z$ s'annulant en 1.

Remarquons d'abord que pour tout $z \in U$, on a $\mathrm{Log}(z) = g(z)$ (exercice !). Donc, dans le demi-plan U, c'est bon. Pour un z dans le demi-plan supérieur $\{z = x + iy \mid y > 0\}$, on a $\mathrm{Log}(z) = i\frac{\pi}{2} + \mathrm{Log}(\frac{z}{i}) = i\frac{\pi}{2} + g(\frac{z}{i})$, avec $\frac{z}{i} \in U$. Donc, Log est bien holomorphe dans ce demi-plan et $\mathrm{Log}'(z) = g'(\frac{z}{i})\frac{1}{i} = \frac{1}{z}$. On raisonne de même dans le demi-plan inférieur où $\mathrm{Log}(z) = -i\frac{\pi}{2} + \mathrm{Log}(iz)$ et $iz \in U$.

v) Soit $\epsilon > 0$. Calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Log}(-1 + i\epsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Log}(-1 - i\epsilon) \ .$$

Que remarquez-vous ?

On obtient les valeurs calculées en f) et en g).

Morale de l'histoire : la détermination principale du logarithme est « le plus court chemin vers les nombres négatifs ».

m) Sauriez-vous à présent identifier *précisément* ce qui cloche dans l'égalité suivante ?

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \overset{(2)}{=} \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} \overset{(4)}{=} 1$$

La formule

$$x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log(x)}$$

montre que choisir une détermination du logarithme, c'est aussi choisir une détermination de la racine n-ème. En effet, tout équation de la forme $x^n = z$ admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ (voir l'exercice 4 !). Il y a donc n choix de valeurs pour $\sqrt[n]{x}$, et aussi n déterminations de la racine n-ème. Le passage d'une détermination du logarithme à l'autre induit un passage d'une détermination d'une racine n-ème à l'autre.

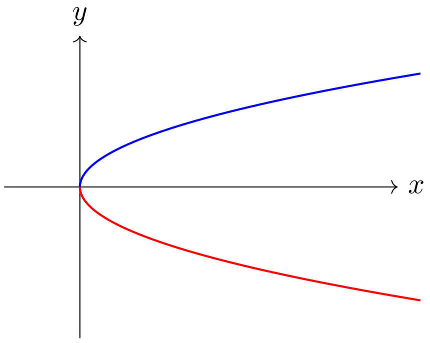


FIGURE 1 – Les deux déterminations continues de la racine carrée d'un nombre réel.

Le choix qu'on vous a toujours enseigné pour la racine carrée était le choix de la racine positive (courbe bleue dans la Figure 1), mais le choix de la racine négative est tout aussi valable et donne bien une fonction continue (courbe rouge dans la Figure 1). Après tout, on a bien $(-x)^2 = x^2$...

Dans le cas qui nous intéresse, les déterminations du logarithme pour lesquelles $\log(1) = 4\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$ correspondent au choix $\sqrt{1} = 1$ alors que les déterminations du logarithme pour lesquelles $\log(1) = 2\pi i + 4\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$ correspondent au choix $\sqrt{1} = -1$. En effet, $e^{\frac{1}{2}\log(1)} = e^{2\pi ik} = 1$ dans le premier cas et $e^{\frac{1}{2}\log(1)} = e^{\pi i + 2\pi ik} = -1$ dans le second.

Or, l'égalité (4) ci-haut correspond au choix d'une détermination du premier type alors que l'égalité (2) correspond à une détermination du deuxième type. En effet, l'égalité (2) correspond au choix d'une détermination du logarithme où $2\log(-1) = \log(1)$, et sachant que $\log(-1) = \pi i + 2\pi ik$, on doit nécessairement avoir $\log(1) = 2\pi i + 4\pi ik$ (notez que dans toute détermination $\log(1)$ et $\log(-1)$ différent de πi, et donc le k ici doit nécessairement être 0 ou -1).

Ainsi, il faut *choisir* : soit c'est l'égalité (2) qui est vraie, soit c'est l'égalité (4). Néanmoins les deux sont valables *modulo* $2\pi i$ (oui oui, $-1 = 1$ modulo $2\pi i$!), et cela illustre le fait qu'il existe deux déterminations continues de la racine carrée. On pourrait dans la même veine écrire de telles « fausses égalités » pour des racines n-èmes et obtenir par exemple pour $n = 4$ une suite d'égalités qui impliqueraient $1 = i = -i = -1$. Encore une fois, ici ces égalités seraient vraies *modulo* $2\pi i$.

Enfin, remarquez qu'en définissant au i) ce qu'est une détermination du logarithme, on a en quelque sorte priorisé la propriété du d) au détriment de la propriété du a), qui ne tient plus que modulo $2\pi i$.

En complément à cet exercice, je vous recommande la lecture du petit paragraphe au bas de la page 19 des notes de cours de Michèle Audin.

Références

[1] Francis Nier, *L3 - Fonctions holomorphes*, Notes de cours, 2019. https://www.math.univ-paris13.fr/~nier/ensP13.html

[2] Michèle Audin, *Analyse complexe*, Notes de cours, 2011. http://irma.math.unistra.fr/~maudin/analysecomp.pdf

[3] Jean-François Burnol, *L305 - Analyse complexe*, Notes de cours, 2005-2006. http://jf.burnol.free.fr/0506L305lecours.pdf