L3 Analyse 6 - Devoir #1

Remise: Lundi 18 mai 2020

par courriel à laplante-anfossi@math.univ-paris13.fr.

Exercice # 1

a) Qu'est-ce qu'une fonction holomorphe ? Donnez une définition mathématique.

b) Dites si les fonctions suivantes sont holomorphes sur leur domaine de définition :

$$(i) \quad \frac{e^z}{z} \quad (ii) \quad \frac{z}{z^2+1} \quad (iii) \quad \overline{z} \quad (iv) \quad e^{1/(z^2+3z)} \quad (v) \quad \mathrm{Re}(z)$$

c) Montrer que toute fonction holomorphe à valeurs réelles est constante.

d) Toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable, de dérivée holomorphe (une infinité de fois !). Elle est de plus analytique : elle est égale en chaque point à son développement en série de Taylor, et il suffit de dériver cette série terme à terme pour obtenir $f'(z)$. On se pose naturellement la question dans l'autre sens : est-ce que toute fonction holomorphe $f(z)$ admet une primitive holomorphe $F(z)$? Peut-on simplement intégrer sa série de Taylor terme à terme pour obtenir $F(z)$? Pourquoi ? Donnez au moins un exemple pour illustrer votre propos.

e) Donnez une condition suffisante pour qu'une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ admette une primitive holomorphe.

f) Qu'est-ce qu'une homotopie entre chemins ? Donnez une définition mathématique.

g) Énoncez le théorème d'invariance par homotopie pour l'intégrale sur un chemin γ d'une fonction holomorphe $\int_\gamma f(z)dz$. *Attention à mettre toutes les hypothèses !*

Exercice # 2 On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \ .$$

a) Dessinez le chemin

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2it} & 0 \le t \le \pi \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2it} & \pi \le t \le 2\pi \ , \end{cases}$$

en indiquant son sens de parcours. Indiquez également les singularités de f. Puis, calculez

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz \ .$$

b) Faites de même avec le chemin

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2it} & 0 \le t \le \pi \\ 1 - \frac{1}{2}e^{2it} & \pi \le t \le 2\pi \ . \end{cases}$$

c) Faites de même avec le chemin

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{2} + ie^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \ .$$

d) Pourquoi les résultats du b) et du c) sont-ils les mêmes ? Y a-t-il une raison conceptuelle pour cela ? Pourquoi le résultat du a) est-il différent des deux autres ? Y a-t-il une raison conceptuelle pour cela ?

e) Écrivez explicitement une homotopie $H(s,t)$ entre $\gamma_2(t)$ et $\gamma_3(t)$, et esquissez-la (vous pouvez par exemple dessiner les courbes $H(0,t) = \gamma_2(t)$, $H(1/3,t)$, $H(2/3,t)$ et $H(1,t) = \gamma_3(t)$; des points seront accordés pour l'esthétisme !).

f) Soit $U = \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Montrer que pour tout lacet γ dans U, on a

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \ .$$

Exercice # 3 Soient γ_1 et γ_2 deux lacets dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)| \ .$$

Montrer que ces deux lacets sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Indice : écrivez une homotopie explicite entre γ_1 et γ_2.

Exercice # 4 On se propose dans cet exercice de donner une preuve topologique du théorème de d'Alembert-Gauss. Supposons donc qu'il existe un polynôme complexe P de degré $n \geqslant 1$ et ne s'annulant pas. Quitte à diviser P par une constante, on suppose même que le coefficient dominant de P est 1.

a) Pour $r > 0$, on paramétrise le cercle de rayon r par $\gamma(t) = re^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que le lacet $P \circ \gamma$ est homotope au lacet constant égal à $P(0)$.

b) Montrer que, si r est assez grand, $P \circ \gamma$ est homotope au lacet γ^n dans $\mathbb{C}^*$. *Indice : utiliser l'exercice 3.*

c) En déduire deux calculs contradictoires de l'indice de $P \circ \gamma$ par rapport à 0.

Exercice # 5 Tâchons de répondre à une question toute simple que vous vous êtes possiblement déjà posée une fois plus ou moins sérieusement dans votre vie :

Que vaut $\log(-1)$?

a) Supposons que la formule $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ est valable également pour les nombres négatifs. Quelle valeur trouvez-vous pour $\log(-1)$?

b) Partons maintenant de la formule définitoire du logarithme :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \ .$$

On voudrait naturellement l'appliquer pour calculer $\log(-1)$. Quel est le problème ?

c) On peut peut-être contourner ce problème en calculant une valeur principale « à la Cauchy », en posant

$$\log(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_1^\epsilon \frac{1}{t}\, dt + \int_{-\epsilon}^x \frac{1}{t}\, dt \right) \ .$$

Qu'obtenez-vous pour $\log(-1)$? Ce résultat est-il compatible avec ce que vous avez trouvé en (a) ?

d) Les résultats que vous venez d'obtenir vous paraissent peut-être convaincants. Sont-ils compatibles avec l'identité

$$x = e^{\log(x)} \ ?$$

e) Maintenant que vous connaissez un peu d'analyse complexe, vous disposez de nouveaux outils pour *contourner* le problème. Voyez-vous où je veux en venir ?

f) Posons $\gamma_1(t) = e^{it}$, avec $t \in [0, \pi]$. Calculez

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} \, dz \ .$$

g) Posons maintenant $\gamma_2(t) = e^{-it}$, avec $t \in [0, \pi]$. Calculez

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \, dz \ .$$

h) Les valeurs obtenues en f) et en g) contredisent-elles le théorème d'invariance par homotopie pour l'intégrale sur un chemin d'une fonction holomorphe ? Pourquoi ?

i) Les valeurs obtenues en f) et en g) pour $\log(-1)$ sont-elles compatibles entre elles ? Avec celle obtenue en a) et c) ? Calculez maintenant $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} \, dz$ pour $t \in [0, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$ et $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \, dz$ pour $t \in [0, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{N}$. Combien avez-vous de valeurs différentes pour $\log(-1)$?

j) Une *détermination du logarithme* est une fonction *continue* f d'une variable complexe z, définie sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0, telle que

$$\forall \ z \in \Omega, \quad e^{f(z)} = z \ .$$

Soit Ω un ouvert connexe ne contenant pas 0. Montrer que si f est une détermination du logarithme sur Ω, alors toute autre détermination du logarithme sur Ω est de la forme $f + 2\pi i k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Montrer également que réciproquement, toute $f + 2\pi i k$ est une détermination du logarithme sur Ω.

k) Montrer qu'il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Morale de l'histoire : $\log(-1)$ *n'est défini qu'à* $2\pi i$ *près !*

l) Cependant, il existe une détermination du logarithme sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ que l'on dit *principale*. Nous allons la construire.

   i) On se retreint à l'ouvert $U = \{x + iy \mid x > 0\}$, et on y définit la fonction $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$. Déterminer l'unique fonction $v(x, y)$ telle que $g = u + iv$ soit holomorphe sur U et telle que $g(1) = 0$.

   ii) Que se passe-t-il lorsque $y = 0$? Pouvions-nous conclure a priori à l'existence de g ? *Indice : se servir du théorème du prolongement analytique.*

   iii) Pour $z = x + iy \in \Omega$ on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) ,$$

   et on définit la fonction

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\theta \ .$$

   Montrer que $\mathrm{Log}(z)$ est bien holomorphe sur Ω et qu'elle est sur cet ouvert l'unique primitive de $1/z$ s'annulant en 1.

iv) Soit $\epsilon > 0$. Calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Log}(-1 + i\epsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Log}(-1 - i\epsilon)\ .$$

Que remarquez-vous ?

Morale de l'histoire : la détermination principale du logarithme est « le plus court chemin vers les nombres négatifs ».

m) Sauriez-vous à présent identifier *précisément* ce qui cloche dans l'égalité suivante ?

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$