Note Title 17/04/2019

Chap IV : Autres propriétés des fonctions holomorphes - Fonctions méromorphes

I] Conséquence de l'analyticité

Rappel : 1) Ω ouvert de $\mathbb{C}$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{C}$

(f holomorphe dans Ω) $\Longleftrightarrow$ (f analytique dans Ω)

2) Si $\quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad$ pour $|z-z_0| < r_{z_0}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z-z_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (z-z_0)^k$$ converge pour $|z-z_0| < r_{z_0}$

F est analytique dans $D(z_0, r_0)$

et $\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z) \qquad F(z_0) = 0$

I.1 Primitive d'une fonction holomorphe

Théorème : Ω ouvert simplement connexe $a \in \Omega$.

Toute fonction f holomorphe dans Ω admet une unique primitive F holomorphe dans Ω tq $F(a) = 0$

$$F(z) = \int_{\gamma_{a \to z}} f(z')\, dz'$$

$\gamma_{a \to z}$ est un chemin C^1 par morceaux dans Ω allant de a à z.

Preuve : Soit $z \in \Omega$ et γ_1, γ_2 deux chemins C^1 par morceaux allant de a à z

$\gamma_1 - \gamma_2$ est un lacet

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z') \, dz' = 0$$

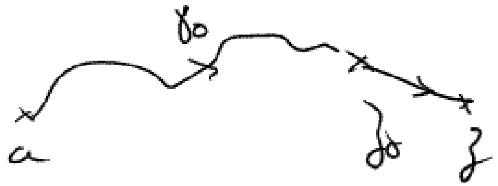
$$\int_{\gamma_1} f(z') \, dz' = \int_{\gamma_2} f(z') \, dz' = F(z)$$

définit bien une fonction F sur Ω, puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi pour aller de a à z.

On a : $F(a) = 0$.

Vérifions que F est holomorphe et $\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z)$.

Il suffit de le vérifier pour $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$



$$\gamma_0 : a \longrightarrow z_0$$

$$F(z) = \int_{\gamma_0} f(z')\,dz' + \int_{[z_0,z]} f(z')\,dz'$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{pour} \quad |z-z_0| < r_{z_0}$$

$$\int_{[z_0,z]} f(z')\,dz' = \int_0^1 f(z_0+t(z-z_0))\,(z-z_0)\,dt$$

$$z' = \gamma(t) = z_0 + t(z-z_0) \qquad t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k (z-z_0)^k\right] (z-z_0)\,dt$$

cv normale si $|z-z_0| \leq \frac{r_0}{2}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+1} \int_0^1 t^k \, dt$

$t \in [0,1]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$$

$$F(z) = \underbrace{\int_{\gamma_0} f(z')\,dz'}_{= F(z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$$ dans

$D(z_0, r) \subset \Omega$

$r < \frac{r_{z_0}}{2}$

dériver

F est analytique dans Ω, donc holomorphe dans Ω et $\frac{\partial F}{\partial z}(z) = f(z)$

On a trouvé une primitive holomorphe F tq $F(a)=0$

<u>Unicité</u> : Si F_1, F_2 sont holomorphes dans Ω et tq $F_1(a) = F_2(a)$

Alors $H(z) = F_1(z) - F_2(z)$ est holomorphe dans Ω et vérifie $\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$

H est $\mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{C})$ $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$ en tout point

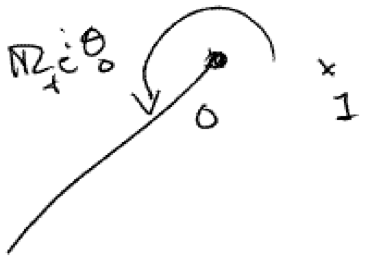
Ω est simplement connexe donc connexe.

Donc $H = Cte = H(a) = 0$

Cas particuliers importants :

1) Détermination principale du logarithme.

$$\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus [0,+\infty[\, e^{i\theta_0} \qquad \theta_0 \in]0, 2\pi[$$

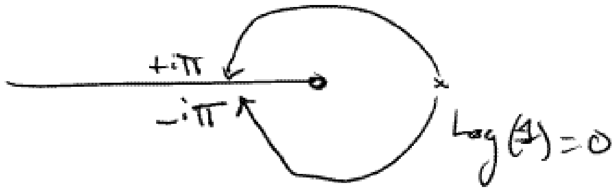


$z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe dans Ω_{θ_0}

Elle admet une primitive

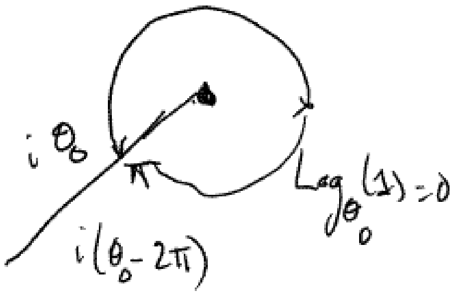
$$\mathrm{Log}_{\theta_0}(z) = \int_{\gamma_{1\to z}} \frac{dz'}{z'}$$ qui s'annule en 1.

$\theta_0 = \pi$ est souvent utilisé



$$\int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = \left[i \right]_0^{\pi-\varepsilon} = i(\pi-\varepsilon)$$

$$\int_0^{-(\pi-\varepsilon)} \frac{d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = -i(\pi-\varepsilon)$$



Dans Ω_{θ_0} : $\exp\left[\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right] = z$

$z \mapsto \frac{1}{z} \exp\left[\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right]$ est holomorphe

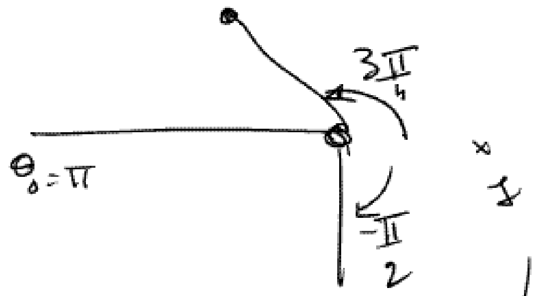
$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\exp\left[\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right]\right] = -\frac{1}{z^2}\exp\left[\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right]$$

$$+\frac{1}{z}\times\underbrace{\frac{1}{z}}_{\frac{d}{dz}\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)}\times\exp\left[\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right] = 0$$

$$\frac{1}{z}\exp\left[\mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right] = \frac{1}{1}\times\exp\Big[\underbrace{\mathrm{Log}_{\theta_0}(1)}_{=0}\Big] = 1$$

$$\mathrm{Log}_{\theta_0}(z_1\times z_2) \neq \mathrm{Log}_{\theta_0}(z_1) + \mathrm{Log}_{\theta_0}(z_2)$$

C'est vrai modulo $2i\pi$



$z_1 = z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ $\qquad z_1 \times z_2 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$

$$\mathrm{Log}\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) = \frac{3i\pi}{4}$$

$$\mathrm{Log}\left(e^{\frac{3i\pi}{2}}\right) = \mathrm{Log}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{i\pi}{2}$$

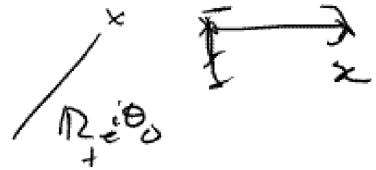
$$\neq \frac{3i\pi}{4} + \frac{3i\pi}{4}$$

2) Détermination principale des puissances z^r, $r \in \mathbb{R}$.
des racines carrées par exemple.

$\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$ $\qquad \theta_0 \in]0, 2\pi[$

$z \mapsto \exp\left[r \, \mathrm{Log}_{\theta_0}(z)\right]$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$
et coincide avec x^r si $z = x > 0$

Si $z = x > 0$

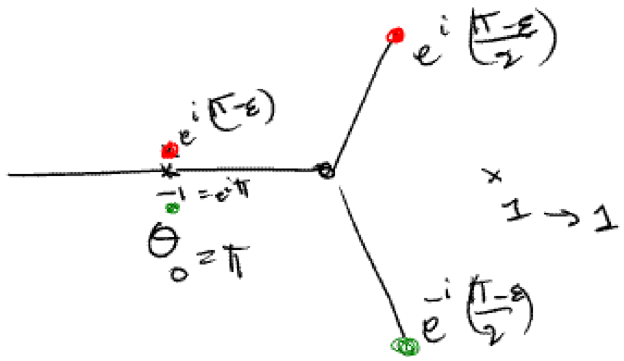


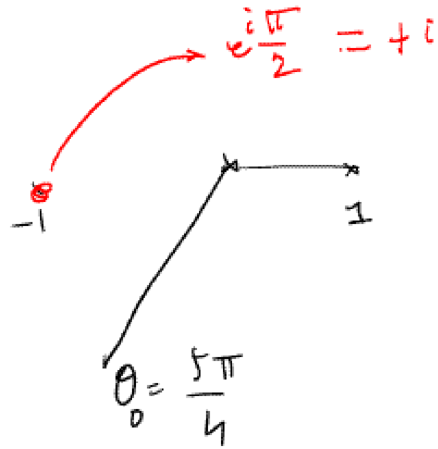
$$\mathrm{Log}_{\theta_0}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \log(x) \text{ usuel.}$$

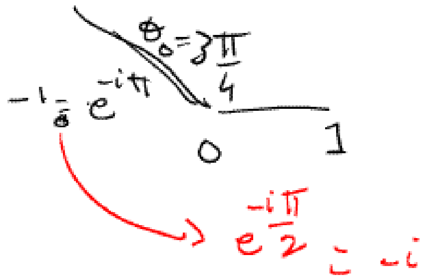
$z = \rho e^{i\theta}$ $\quad \rho > 0$

$$\mathrm{Log}_{\theta_0}(\rho e^{i\theta}) = \log(\rho) + \underbrace{\mathrm{Log}_{\theta_0}(e^{i\theta})}_{i\theta \bmod (2i\pi)}$$

On peut définir une racine carrée holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$ $\qquad r = \frac{1}{2}$







I.2 Zéros isolés

Lemme : Ω est supposé connexe

f est holomorphe dans Ω.

$E_f = \{ z \in \Omega, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ f^{(k)}(z) = 0 \}$

Alors • soit $E_f = \Omega$ et f est constante égale à 0

• soit $E_f = \emptyset$ $\quad \forall z \in \Omega, \exists k \in \mathbb{N}, \ f^{(k)}(z) \neq 0$

Preuve : • $E_f = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{ z \in \Omega, \ f^{(k)}(z) = 0 \}}_{[f^{(k)}]^{-1}(\{0\}) \text{ fermé}}$

E_f est fermé.

• E_f est ouvert. Si $z_0 \in E_f$ alors $f^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme f est holomorphe $\displaystyle f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(k)}(z_0)}^{=0}}{k!} (z-z_0)^k$,

pour $|z-z_0| < r_{z_0}$

$f(z) = 0$ pour tout $|z-z_0| < r_{z_0}$

$\forall z \in D(z_0, r_0)$, $z \in E_f$ $\blacksquare$

<u>Théorème des zéros isolés</u> : Si f est holomorphe dans Ω connexe, l'ensemble des zéros de f ne peut pas avoir de point d'accumulation dans Ω, sauf si $f \equiv 0$.

Preuve : Si f est non identiquement nulle alors pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, d'après le lemme. On note k_0 le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tq $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Pour $|z - z_0| < r_0$ on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{pour } |z - z_0| < r_0$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

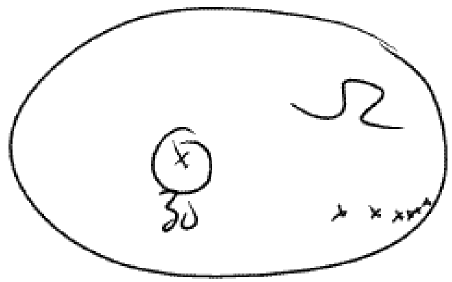
$$= (z - z_0)^{k_0} \left[\frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k_0+k)}(z_0)}{(k_0+k)!} (z - z_0)^k \right]$$

$$= \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!}(z-z_0)^{k_0}\Big[\overline{1 + \underset{z\to z_0}{O}(|z-z_0|)}^{\neq 0}\Big]$$

Si $|z-z_0| \leq \varepsilon$ avec assez petit $\left|\underset{z\to z_0}{O}(|z-z_0|)\right| \leq \frac{1}{2}$

$f(z) = 0$ ssi $z = z_0$ $\boxed{}$

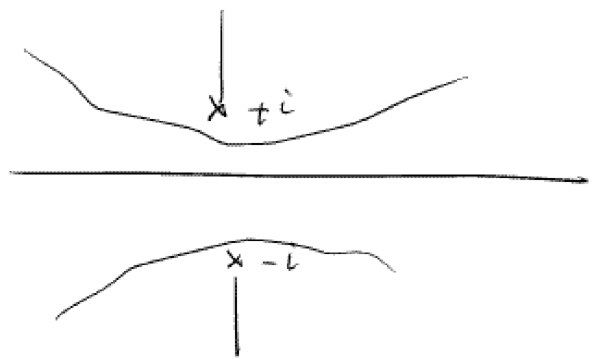
On peut avoir des points d'accumulation sur $\partial\Omega$ pas dans Ω



Application : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est analytique réelle il existe un voisinage U de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{C}$ connexe et une unique fonction holomorphe ϕ dans U tq

$$\phi\big|_{\mathbb{R}} = f.$$

ex : $\dfrac{1}{1+t^2}$



$\dfrac{1}{1+z^2}$ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{+i, -i\}$

<u>Unicité :</u> ϕ_1, ϕ_2 holomorphes dans U tq U connexe

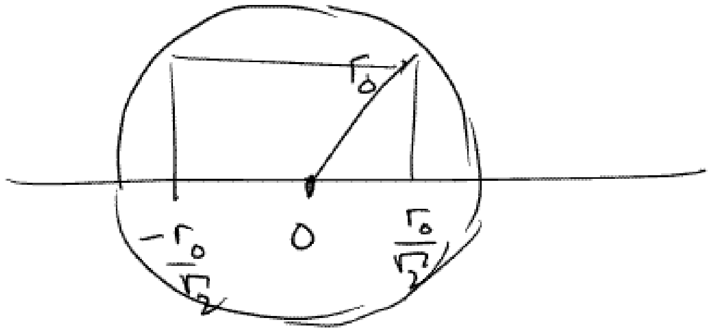
$$\phi_1\big|_{\mathbb{R}} = \phi_2\big|_{\mathbb{R}} = f$$

$$\phi_1 - \phi_2\big|_{\mathbb{R}} \equiv 0$$

$\phi_1 - \phi_2$ a un ensemble de zéros qui a un point (~~en~~ beaucoup) d'accumulation dans U.

Donc $\phi_1 - \phi_2 \equiv 0$ dans U.

<u>Existence :</u> Au voisinage de 0, f est développable en série entière avec un rayon de cv $r_0 > 0$



Pour l'intervalle $\left[-\frac{r_0}{\sqrt{2}}, \frac{r_0}{2}\right]$ il existe $\varepsilon_0 = \frac{r_0}{2\sqrt{2}}$

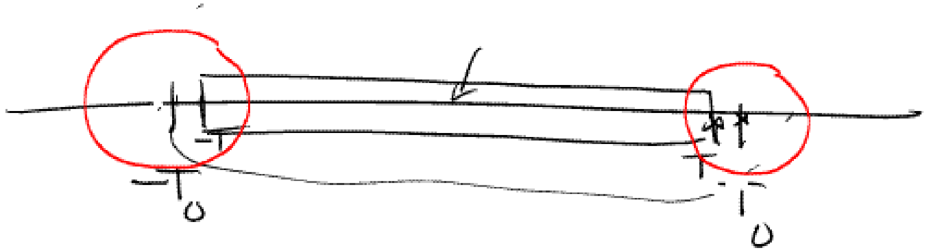
tq $f|_{\left[-\frac{r_0}{\sqrt{2}}, \frac{r_0}{\sqrt{2}}\right]}$ est la restriction d'une

fonction holomorphe au voisinage de

$$\left[-\frac{r_0}{\sqrt{2}}, \frac{r_0}{\sqrt{2}}\right] \times \left[-\varepsilon_0, \varepsilon_0\right].$$

$$E = \left\{ T \geq 0,\ \exists\, \varepsilon_T > 0,\quad f|_{[-T,T]} \text{ est la restriction d'une fonction holomorphe au voisinage } [-T,T] \times [-\varepsilon_T, \varepsilon_T] \right\}$$

Si $T_0 = \sup E < +\infty$ comme f admet un développement en série entière en $+T_0$ et $-T_0$ on arrive à une absurdité.



I.3 Théorème de l'application ouverte

Théorème : Ω connexe

Si f est holomorphe et non constante alors

$\llcorner$ $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Preuve : Si $b = f(z_0) \in f(\Omega)$, il s'agit de montrer que pour $r > 0$ assez petit tout $w \in D(b, r)$ admet un antécédent par f.

Comme précédemment on écrit

$$\underbrace{f(z) - f(z_0)}_{\text{non identiquement nulle}} = (z - z_0)^{k_0} \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right]$$

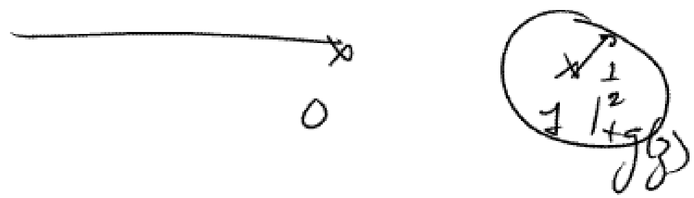
k_0 plus petit k tq $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

$$= (z - z_0)^{k_0} \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!}\left[1 + g(z)\right]$$

g holomorphe et $g(z_0) = 0$

On choisit ζ une racine k_0-ième de $\dfrac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!}$

et on prend la détermination principale de $\sqrt[k_0]{}$ avec l'angle $\theta_0 = \pi$



si $|z - z_0|$ assez petit

$$f(z) - f(z_0) = \left[(z - z_0)\,\zeta\,\sqrt[k_0]{1 + g(z)}\right]^{k_0}$$

$z \longmapsto \sqrt[3]{1+g(z)}$ est holomorphe

et vaut 1 en z_0.

$\varphi : z \longmapsto (z-z_0)\, \zeta^{-1} \sqrt[3]{1+g(z)}$

est holomorphe avec $\varphi(z_0)=0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0) = \zeta \neq 0$$

$\tilde{\varphi}(x,y)$ a pour différentielle

en (x_0,y_0) une similitude

directe (inversible).

Le théorème d'inversion locale

$\varphi : U_{z_0} \longrightarrow V_0$ bijection

U_{z_0} voisinage z_0

V_0 —— 0

$$V_0 \supset D(0, \varepsilon_0)$$

$$z \longmapsto f(z) - f(z_0) = \Big(\overbrace{\varphi(z)}^{w} \Big)^{k_0}$$

a une image qui contient $\{ w^{k_0},\ w \in D(0, \varepsilon_0) \}$

$$= D(0, \varepsilon_0^{k_0})$$

L'image de f contient $D(\underbrace{f(z_0)}_{b}, \varepsilon_0^{k_0})$

C'est un ouvert

Corollaire — Principe du maximum

Si f est holomorphe dans Ω connexe et $|f(z)|$ a un maximum dans Ω alors f est constante.

III Fonctions méromorphes

Définition : Si f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$ on dit que f

a) a une singularité effaçable en z_0 si f est la restriction d'une fonction holomorphe sur Ω.

b) a un pôle d'ordre k en z_0 si

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

développement de Laurent

série cv dans $\{z \in \Omega, 0<|z-z_0|<r_0\}$

c) a une singularité essentielle dans les autres cas.

Définition : Une fonction f dans Ω est dite méromorphe si elle admet un développement de Laurent en tout point $z_0 \in \Omega$

$$f(z) = \frac{a_{-k}(z_0)}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}(z_0)}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)(z-z_0)^k$$

ie $0 < |z-z_0| < r_{z_0}$

$$\text{Rés}(f, z_0) = a_{-1}(z_0)$$

Exemple de fonctions méromorphes : Ω connexe

f, g holomorphes $\quad g \not\equiv 0$

$\frac{f}{g}$ est méromorphe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

$$g(z) = \underline{(z-z_0)^{k_0}} \frac{g^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} \left(1 + \underline{\gamma(z)}\right)$$

hol avec $\gamma(z_0) = 0$

$\frac{f}{g}$ a un pôle d'ordre $\leq k_0$

<u>Théorème des résidus</u> : Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$

et γ un lacet tel que pour
$\mathcal{C}^1$ par morceaux

tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

(cas particulier Ω simplement connexe).

et si f est méromorphe dans Ω alors

et que ses pôles n'appartiennent pas à $\gamma([t_{min}, t_{max}])$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z \text{ pôle de } f} \mathrm{Ind}_\gamma(z)\, \mathrm{Rés}_z(f)$$

Proposition : f holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ a une singularité effaçable en z_0 ssi f est bornée au voisinage de z_0.

$$\exists M>0, \exists r>0, \forall z \in D(z_0,r)\setminus\{z_0\}, \quad |f(z)| \leq M$$

Preuve : Supposons f bornée au voisinage de z_0

$g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$ est holomorphe dans $D(z_0,r) \subset \Omega$

avec $g(z_0) = 0 \qquad g'(z_0) = 0$

En utilisant le développement en série entière de g en z_0 on a :

$$g(z) = \sum_{k \geq 2} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

$$= (z-z_0)^2 h(z) \quad \text{pour } |z-z_0| < r_0 \ (\text{et } < r)$$

On définit $\varphi(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } |z-z_0| < \min(r_0, r) \\ \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2} = f(z) & \text{si } |z-z_0| > \dfrac{\min(r_0, r)}{2} \end{cases}$

qui est holomorphe sur Ω et vérifie

$$\varphi\big|_{\Omega\setminus\{z_0\}} = f.$$

Réciproquement si $f = \varphi\big|_{\Omega\setminus\{z_0\}}$ avec φ holomorphe dans Ω alors f est bornée au voisinage de z_0 $\boxed{}$

Preuve du théorème : 1) Les pôles d'une fonction méromorphe sont des points isolés de Ω.

En effet si

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{pour } |z-z_0|<r$$

alors f est bornée au voisinage de chaque point $z_1 \in D(z_0,r) \setminus \{z_0\}$ et n'a donc pas de pôle en z_1.

z_0 est le seul pôle de f dans $D(z_0,r)$

2) On sait que l'ensemble

$$K = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0\} \cup \gamma([t_{min}, t_{max}])$$

est un compact de $\mathbb{C}$.

On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

tandis que $\gamma([t_{min}, t_{max}]) \subset \Omega$ est disjoint de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Ainsi $K \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = \phi$

et K est un compact inclus dans Ω.

L'ensemble des pôles de f pour lesquels $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0$ est donc fini (intersection d'un ensemble discret avec le compact K).

c) On note $\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C},\ d(z, K) < \varepsilon\}$ c'est un ouvert inclus dans Ω, contenant $\gamma([t_{min}, t_{max}])$ tel que pour $\varepsilon \leqslant d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$:

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon,\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

De plus comme l'ensemble des pôles de f est discret on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$\{z \in K,\ z \text{ pôle de } f\} = \{z \in \Omega_\varepsilon,\ z \text{ pôle de } f\}$$
$$= \{z_1, \dots, z_N\}$$

$$f(z) = \frac{a_{-k_j}(z_j)}{(z-z_j)^{k_j}} + \dots + \frac{a_{-1}(z_j)}{z-z_j} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_j)(z-z_j)^k \quad \text{pour } |z-z_j| < r_j$$
$j = 1, \dots, N$

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{a_{-k_j}(z_j)}{(z-z_j)^{k}} + \dots + \frac{a_{-1}(z_j)}{(z-z_j)} \right]$$

est alors une fonction holomorphe dans Ω_ε

En appliquant le théorème de Cauchy global à g
(où Ω_ε vérifie : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon, \ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$)
on obtient

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_\gamma \frac{a_{-k_j}(z_j)}{(z - z_j)^{k_j}}\, dz + \int_\gamma \frac{a_{-(k_j-1)}(z_j)}{(z - z_j)^{k_j - 1}} + \int_\gamma \frac{a_{-1}(z_j)}{(z - z_j)}\, dz$$

or $$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$$

et en dérivant par rapport à z_0

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^k}\,dz = 0 \qquad \text{pour } k>1$$

On obtient donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_j)\, a_{-1}(z_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_j)\ \mathrm{Rés}(z_j)$$

ce qui est le résultat demandé $\blacksquare$

Il reste à démontrer la version générale du théorème de Cauchy global que nous avons utilisée ci-dessus.

Théorème de Cauchy global (version générale)

Si f est holomorphe dans Ω (holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ et continue sur Ω)
et γ est un lacet de Ω tq :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$$

alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

et $\forall w \in \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$, $\displaystyle \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \mathrm{Ind}_\gamma(w)\, f(w)$

Preuve : z_0 est une singularité effaçable et on peut donc supposer f holomorphe dans Ω.

On a vu que l'ensemble

$$K = \{ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0 \} \cup \gamma([t_{min}, t_{max}])$$

est un compact de Ω (sous l'hypothèse $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$)

On considère la fonction $\phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$
définie par $\phi(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$

ϕ est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$.

$\int_\gamma \phi(z,w)\,dz = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \phi(\gamma(t),w)\,\gamma'(t)\,dt$ définit une fonction de w à valeur dans $\mathbb{C}$.

- Pour tout $w \in \Omega$, $t \longmapsto \phi(\gamma(t),w)\,\gamma'(t)$ est mesurable $[t_{min}, t_{max}]$ muni de la mesure de Lebesgue

- Pour tout $t \in [t_{min}, t_{max}]$ l'application

$$w \longmapsto \phi(\gamma(t), w)\, \gamma'(t) = \begin{cases} \dfrac{f(\gamma(t)) - f(w)}{\gamma(t) - w} & \text{si } w \neq \gamma(t) \\ f'(w) & \text{si } w = \gamma(t) \end{cases}$$

est holomorphe sur Ω. En effet elle l'est sur $\Omega \setminus \{\gamma(t)\}$ et pour $w \in D(\gamma(t), r_t)$

$$f(w) = f(\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\gamma(t))}{k!} (w - \gamma(t))^k$$

$$\phi(w, \gamma(t)) = \underbrace{f'(w) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\gamma(t))}{k!} (w - \gamma(t))^{k-1}}_{\text{hol dans } D(\gamma(t), r_t)}$$

- Si $w \in K_1$, compact de Ω alors

$(t, w) \in [t_{min}, t_{max}] \times K_1$ compact

et il existe M_{K_1} tq

$$\forall z \in K_1, \forall t \in [t_{min}, t_{max}], \left| \varphi(\gamma(t), w) \right| \leq \underbrace{M_{K_1}}_{\text{majorant intégrable}}$$

On applique Lebesgue holomorphe pour dire que

$$\varphi = w \longmapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \, dz$$ est holomorphe dans Ω

L'application φ_1 définie par

$$\varphi_1(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$

où K est le compact

$$K = \{ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0 \} \cup \gamma([t_{min}, t_{max}]) \subset \Omega$$

On a de plus :

$$\forall z \in \Omega \setminus K, \quad \varphi(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz - f(w) \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz - f(w) \underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}_{=0}$$

$$= \varphi_1(w)$$

L'application H définie par :

$$H(w) = \begin{cases} \varphi(w) & \text{si } w \in \Omega \\ \varphi_1(w) & \text{si } w \in \mathbb{C} \setminus K \end{cases}$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

De plus elle vérifie

$$\lim_{|w| \to +\infty} H(w) = \lim_{w \to +\infty} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz = 0$$

Car

$$\left| \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz \right| \leq \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{|f(\gamma(t))|}{|\gamma(t)-w|} |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\leq \underbrace{\frac{\max_{t \in [t_{min}, t_{max}]} |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)|}{\left|\frac{w}{2}\right|}}_{\xrightarrow[|w| \to +\infty]{} 0} \quad \text{si } |w| \geq 2 \times \max_{t \in [t_{min}, t_{max}]} |\gamma(t)|$$

Le théorème de Liouville dit alors :

$$\forall w \in \mathbb{C}, \quad H(w) = 0$$

et en particulier

$$\forall w \in \Omega, \ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz = \mathrm{Ind}_\gamma(w) f(w)$$

Si on applique cela en remplaçant $f(z)$ par $f(z) \times (z-w)$

on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = 0 \qquad \text{pour } f \text{ holomorphe}$$