Note Title — Chap III : Théorème de Cauchy et première conséquences — 27/03/2019

I] Théorème de Cauchy 1ère version

Théorème: Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{C})$ holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Alors pour tout lacet γ, $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω on a

$\gamma(t_{min}) = \gamma(t_{max})$

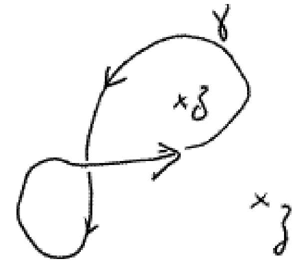
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

Démonstration voir plus loin. Elle se fait par approximation par des chemins polygonaux et par homotopie.

II) Indice d'un lacet, formule de Cauchy

Définition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω. Alors pour $z \in \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$, on appelle indice de γ par rapport à z le nombre

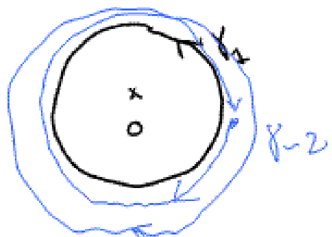
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz'}{z'-z}$$



$$\left(\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \right)$$

Proposition : $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}]) \longrightarrow \mathbb{C}$
est une fonction à valeur dans $\mathbb{Z}$
qui est constante sur chaque composante
connexe de $\Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$

Exemple : $\gamma_k = k\,\gamma_1$ $\quad$ γ_1 cercle trigonométrique
$\gamma_1(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$



$-2\gamma_1 = \gamma_{-2}$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-0} = \frac{1}{2i\pi}\, k \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}-0}\, \underbrace{i e^{it}}_{\gamma_1'(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \times k \times 2\pi \times i = k$$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ compte le nombre de tours que que γ fait autour de z_0 dans le sens trigonométrique.

<u>Démonstration</u> :

$$\int_\gamma \frac{dz'}{z'-z} = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{1}{\underbrace{\gamma(t)}_{z'} - z}\, \underbrace{\gamma'(t)\, dt}_{dz'} \overset{\mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\gamma(t)-z}\, \gamma'(t)\, dt$$

L'application $z \longmapsto \varphi_z$ $\qquad \varphi_z(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$

est continue de $\Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$ dans $\mathcal{C}^0([t_k, t_{k+1}]; \mathbb{C})$

$z_n \to z \qquad \varphi_{z_n} \xrightarrow{n \to \infty} \varphi_z$ dans $\mathcal{C}^0([t_k, t_{k+1}]; \mathbb{C})$

$$\varphi_{z_n}(t) - \varphi_z(t) = \gamma'(t)\left(\frac{1}{\gamma(t) - z_n} - \frac{1}{\gamma(t) - z}\right)$$

$$= \gamma'(t) \frac{z_n - z}{(\gamma(t) - z_n)(\gamma(t) - z)}$$

$$|\varphi_{z_n}(t) - \varphi_z(t)| \leq \left(\max_{s \in [t_k, t_{k+1}]} |\gamma'(s)|\right) \times \underbrace{\max_{s \in [t_k, t_{k+1}]} \left(\frac{1}{|\gamma(s) - z_n| \, |\gamma(s) - z|}\right)}_{\text{unif majorée } / n \text{ pour } n \geq n_0} |z_n - z|$$

$$\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\varphi_{z_n}(t) - \varphi_z(t)| \leq C \, |z_n - z|$$

On en déduit : $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z$ dans $\Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz'}{z' - z_n} = \mathrm{Ind}_\gamma(z_n) \xrightarrow{n \to \infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z)$$

- Vérifions $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ si $z \in \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$

$$\left(2i\pi \, \mathrm{Ind}_\gamma(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}\right) \iff \left(\exp\left(2i\pi \, \mathrm{Ind}_\gamma(z)\right) = 1\right)$$

$$\phi(t) = \exp\left[\int_{t_{min}}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds\right] \qquad \phi(t_{max}) = \exp\left(\int_\gamma \frac{dz'}{z'-z}\right)$$

$t \in [t_{min}, t_{max}]$

$$= \exp\left(2i\pi \, \mathrm{Ind}_\gamma(z)\right)$$

ϕ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux $: [t_{min}, t_{max}] \to \mathbb{C}$

$$\phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \times \underbrace{\exp\left[\int_{t_{min}}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds\right]}_{\phi(t)} \qquad t \in [t_{min}, t_{max}] \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$$

$$\left[\frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z}\right]' = \frac{\phi'(t)\,(\gamma(t)-z) - \phi(t)\,\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2}$$

$$= \frac{\phi'(t) - \phi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}}{(\gamma(t)-z)} = 0$$

$$\frac{\phi(t_{max})}{\gamma(t_{max})-z} = \frac{\phi(t_{min})}{\gamma(t_{min})-z} \qquad z \neq \gamma(t_{max}) = \gamma(t_{min})$$

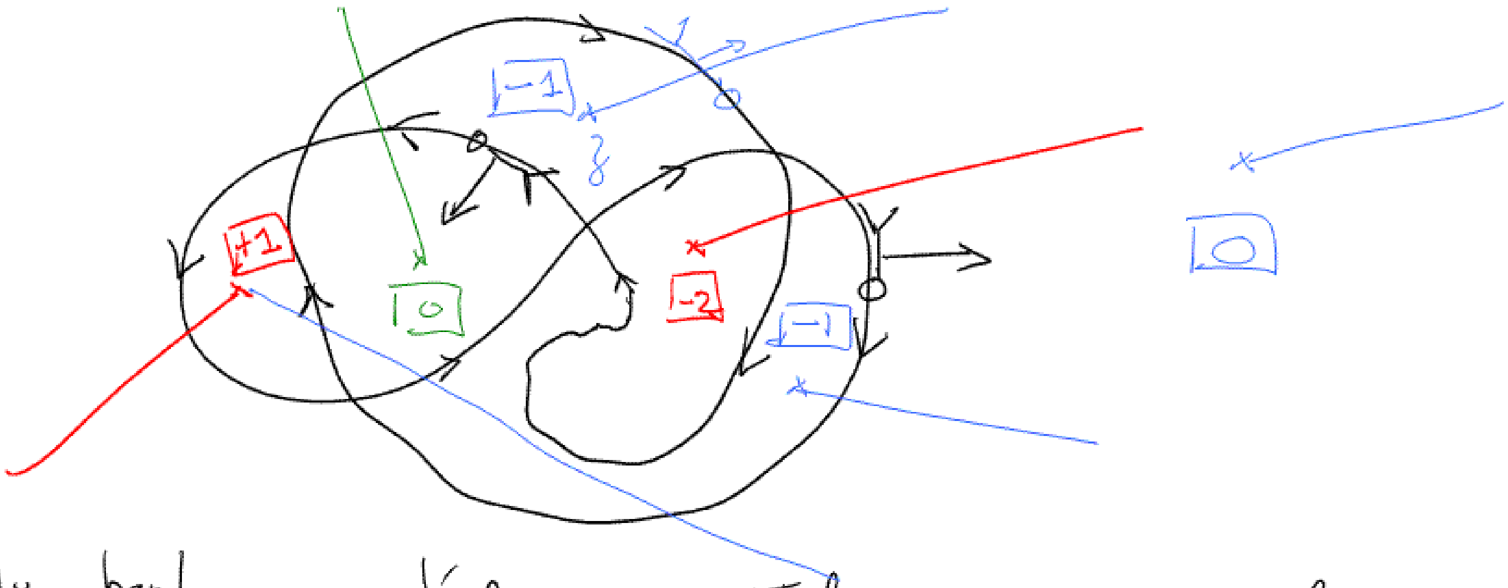
$$\exp(2i\pi \, \mathrm{Ind}_\gamma(z)) = \phi(t_{max}) = \phi(t_{min}) = \exp\left(\int_{t_{min}}^{t_{min}} \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t)-z}\right) = e^0 = 1$$

$$\left(\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}]) \xrightarrow[\text{continue}]{} \mathbb{Z}\right)$$

Ind_γ est donc constante sur chaque composante connexe

(l'image d'un connexe est un connexe) $\blacksquare$

$\Omega = \mathbb{C}$

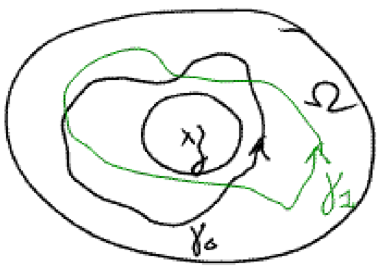


Régle du bonhomme d'Ampère : Il se déplace sur le chemin γ en tendant le bras gauche ~~vers le point z~~. Il compte le nombre de tours qu'il fait autour du point z. Pour cela on fixe une demi-droite partant de z et compte le nombre de fois où le bonhomme traverse cette demi-droite avec

z à gauche $(+1)$
à droite (-1).

Propriétés supplémentaires de l'indice

Proposition : Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets $\mathcal{C}^1$ par morceaux homotopes dans l'ouvert Ω, alors pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ on a $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$



$\times z$

Démonstration : 1) On peut approcher γ_0 et γ_1 par des lacets $\mathcal{C}^1$

$\gamma_{0,n}$ et $\gamma_{1,n}$ $\forall q$ $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{k,n}} \frac{dz'}{z'-z} \longrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k} \frac{dz'}{z'-z}$

$k = 0$ ou 1

$$\underset{\Psi}{\mathbb{Z}} \qquad \underset{\Psi}{\mathbb{Z}}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{k,n}} \frac{dz'}{z'-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k} \frac{dz'}{z'-z}$$

pour n assez grand.

2) Si on a une homotopie $\phi : [0,1]\times[0,1] \xrightarrow{\text{continue}} \Omega$

$\forall t\in[0,1]$, $\phi(0,t) = \gamma_0(t)$
$\phi(1,t) = \gamma_1(t)$

On l'approche de la même façon par

$\phi_n : [0,1]\times[0,1] \xrightarrow{\text{continue}} \Omega$

$\forall t \in [0,1]$, $\phi_n(0,t) = \gamma_{0,n}(t)$
$\phi_n(1,t) = \gamma_{1,n}(t)$

de telle sorte que $s \to \phi_n(s,\cdot)$ est continue de $[0,1]$ à valeur dans $\mathcal{C}^1([0,1]; \Omega)$

On pose $\gamma_{n,s}(t) = \phi_n(s,t)$

Alors l'application $[0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$s \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{n,s}} \frac{dz'}{z'-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{1}{\phi_n(s,t)-z}\left(\frac{d}{dt}\phi_n\right)(s,t)\, dt$$

est continue, donc constante (l'image du connexe $[0,1]$ est un connexe de $\mathbb{Z}$)

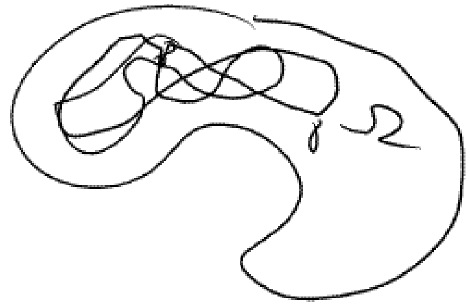
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{dz'}{z'-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{1,n}}\frac{dz'}{z'-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{0,n}}\frac{dz'}{z'-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz'}{z'-z} \quad \blacksquare$$

Cas particulier : $\gamma : [0,1] \to \Omega$, Ω simplement connexe et $z \notin \Omega$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = 0$$

$\times$

γ



Proposition : 1) Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'un ouvert Ω, alors l'ensemble des $z \in \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}])$

$$\text{Ind}_\gamma(z) \neq 0 \quad \text{est borné.}$$

2) Si Ω est simplement connexe

- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$

- $\{ z \in \Omega,\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0 \} \cup \gamma([t_{min}, t_{max}])$ est inclus dans un compact K de Ω.

Preuve : 1)

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz'}{z'-z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{1}{\gamma(t)-z}\, \gamma'(t)\, dt$$

$$R_0 = \max_{t \in [t_{min}, t_{max}]} |\gamma(t)|$$

$$M = \max_{k \in \{0, \dots, N-1\}} \left[\max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\gamma'(t)| \right]$$

$$|z| \geqslant 2R_0 \qquad |\gamma(t) - z| \geqslant |z| - |\gamma(t)| \geqslant \frac{|z|}{2}$$

$$\mathrm{IV} \Rightarrow \left| \mathrm{Ind}_\gamma(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{M}{\frac{|z|}{2}}\, dt \leq \frac{(t_{max} - t_{min})}{2\pi} \frac{M \times 2}{|z|}$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \stackrel{\text{si}}{\Longleftarrow} \quad |z| \geqslant \frac{4M(t_{max}-t_{min})}{2\pi}$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |z| < \frac{4M(t_{max}-t_{min})}{2\pi}$$

2) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ déjà fait (cas particulier de la propriété d'homotopie)

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} z \in \Omega \setminus \gamma([t_{min}, t_{max}]) \\ |z| \leq R \quad \text{d'après 1)} \end{cases}$$

$\{z \in \Omega,\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0\} \cup \gamma([t_{min}, t_{max}])$ est un borné de Ω.

Son <u>adhérence</u> est un compact K de $\mathbb{C}$.

Il s'agit de vérifier que ce compact est inclus dans Ω.

Si ce n'est pas le cas, il existe $z \in K$ tq $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n \qquad z_n \in \Omega$$

$$\left(\mathrm{Ind}_\gamma(z_n) \neq 0 \quad \text{ou } z_n \in \gamma([t_{min}, t_{max}]) \right)$$

$$\left.\begin{array}{l} z \in \overline{\Omega} \\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \end{array}\right) \qquad z \in \partial\Omega$$

$\mathbb{C} \setminus \Omega$

$$z = \lim_{n \to \infty} z'_n \qquad z'_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z'_n) = 0$$

$z \notin \gamma([t_{min}, t_{max}])$ car $\mathrm{dist}(\gamma([t_{min}, t_{max}]), \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$

Cela contredit $z \in K$ $\boxed{}$

Démonstration du théorème de Cauchy ($1^{ère}$ forme)

Ω simplement connexe $\qquad z_0 \in \Omega$

γ lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux

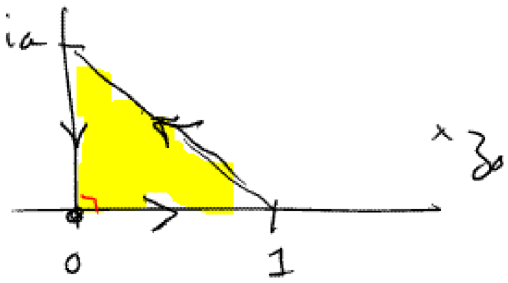
f holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, continue sur Ω.

On veut montrer $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$

1^e cas : $\quad T_{0,1,ia} = \{ x+iy,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq a(1-x) \}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} t(1-0) & \text{si } t \in [0,1] \\ 1+(t-1)(ia-1) & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

$$ia + (t-2)(0-ia) \quad \text{si} \quad t \in [2,3]$$



$$z_0 \in T_{0,1,ia} \subset \Omega$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(t+i0)\,1\,dt + \int_1^2 f\big(1+(t-1)(ia-1)\big)(ia-1)\,dt$$

$$+ \int_2^3 f\big(ia+(t-2)(-ia)\big)(-ia)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t+i0)\,dt - \int_0^1 f\big(1+t'(ia-1)\big)\,dt'$$

$$+ ia\left[\int_0^1 f\big(1+t'(ia-1)\big)\,dt' - \int_0^1 f\big(ia+t'(-ia)\big)\,dt'\right]$$

$$= \int_0^1 f(t+i0)\,dt - \int_1^0 f(t+(1-t)ia)(-dt) \qquad (1-t')=t$$

$$+ia \int_1^0 f(t+(1-t)ia)(-dt) - \int_0^1 f((1-t)ia)\,dt \qquad 1-t'=t, \quad t'=t$$

$$= \int_0^1 \left[f(t+i0) - f(t+(1-t)ia)\right] dt$$

$$+ia \int_0^1 \left[f(t+(1-t)ia) - f((1-t)ia)\right] dt$$

$$f(x+iy) = \tilde{f}(x,y)$$

$$= \int_0^1 \left[-\int_0^{ia(1-t)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t,s)\,ds\right] dt$$

$$+\, ia \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \left(s, (1-t)a\right) \, ds \right] dt$$

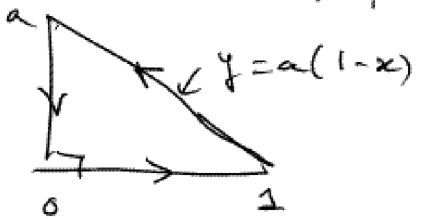
$$= -\int_0^1 \left[\int_0^{a(1-x)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} (x, y) \, dy \right] dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= 1 - \tfrac{y}{a} \\ y &= (1-t)\, a \\ dy &= -a\, dt \\ -dy &= a\, dt \end{aligned}} \;\dashrightarrow\; + \, i \int_a^0 \left[\int_0^{1-\frac{y}{a}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} (x, y) \, dx \right] (-dy)$$

$$= i \left[\iint_{\substack{0 \le y \le a \\ 0 \le x \le 1 - \frac{y}{a}}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} (x, y) \, dx\, dy \right.$$

$$\left. + \iint_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le a(1-x)}} i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} (x, y) \, dx\, dy \right]$$

$a>0 \quad T_{0,1,ia} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq x\leq 1 \text{ et } 0\leq y\leq a(1-x)\}$



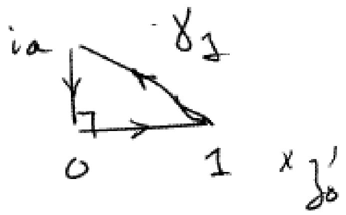
$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq y\leq a \text{ et } x = 1-\frac{y}{a}\right\}$

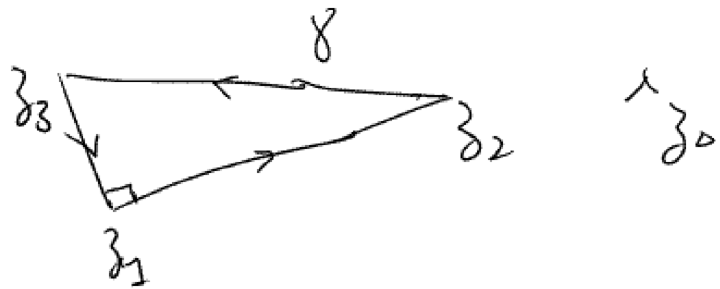
$$\int_\gamma f(z)\,dz = i\iint_{T_{0,1,ia}} \left(\frac{\partial \tilde f}{\partial x} + i\frac{\partial \tilde f}{\partial y}\right)(x,y)\,dx\,dy$$

$$= i\iint_{T_{0,1,ia}} \underbrace{2\frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+iy)}_{=0}\,dx\,dy$$

Même résultat si $a<0$ $\qquad = 0$ car f est holomorphe.

<u>2e cas</u>: γ est le bord d'un triangle T_{z_1,z_2,z_3} rectangle en z_1 avec $z_0 \notin T_{z_1,z_2,z_3}$





Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$

$$z \longmapsto \alpha z + \beta$$
$$0 \longmapsto z_1$$
$$1 \longmapsto z_2$$
$$ia \longmapsto z_3$$
$$T_{0,1,ia} \not\ni z_0' \longmapsto z_0$$

$$\gamma_1(t) \longrightarrow \gamma(t) = \alpha \gamma_1(t) + \beta$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^3 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

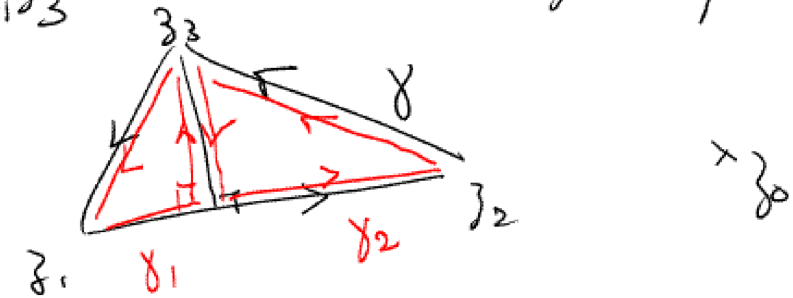
$$= \int_0^3 f(\alpha \gamma_1(t) + \beta) \, \alpha \gamma_1'(t) \, dt$$

$$= \alpha \int_0^3 g(\gamma_1(t)) \, \gamma_1'(t) \, dt = \alpha \int_{\gamma_1} g(z) \, dz$$

avec $g(z) = f(\alpha z + \beta)$ qui est holomorphe au voisinage de $T_{0,1,ia}$

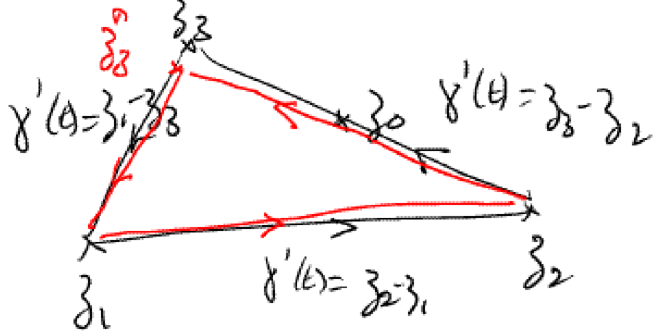
donc $\displaystyle\int_\gamma f(z) \, dz = \alpha \int_{\gamma_1} g(z) \, dz = 0.$

<u>3e cas</u> : T_{z_1, z_2, z_3} est un triangle quelconque $\quad z_0 \notin T_{z_1 z_2 z_3}$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0.$$

T_{z_1, z_2, z_3} est un triangle quelconque et $z_0 \in \gamma([0,3])$

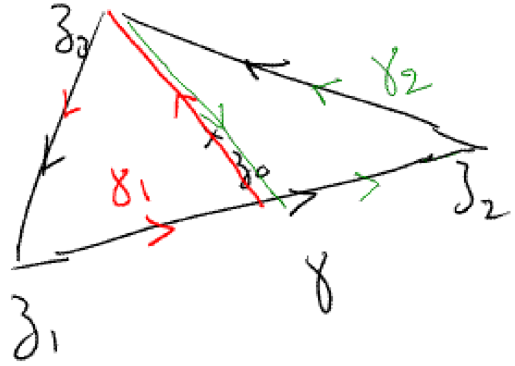


γ^n chemin passant par z_1, z_2, z_3^n

avec $\lim\limits_{n \to \infty} z_3^n = z_3$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{\gamma^n} f(z)\,dz}_{=0} = 0$$

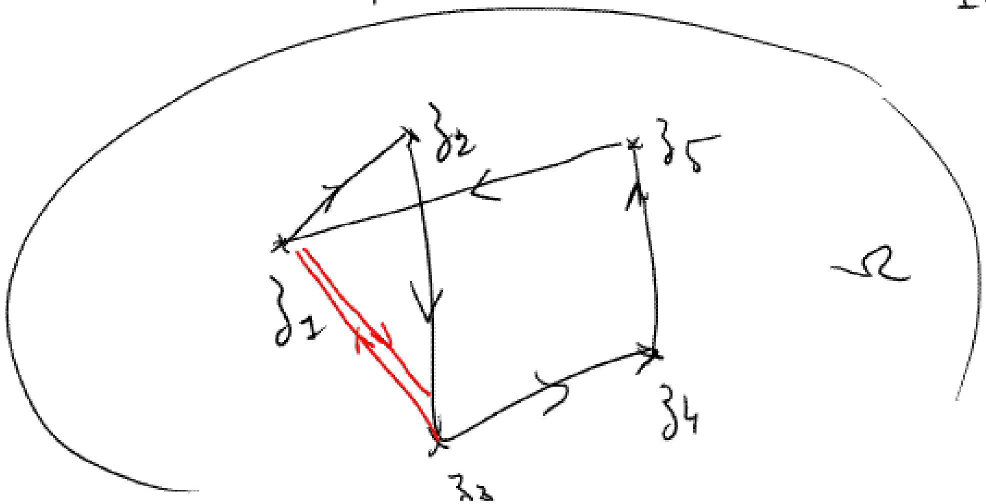
Cas général où z_0 est à l'intérieur de T_{z_1, z_2, z_3}



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{=0}$$

Cas $\quad z_0 \in \gamma_1([0,3]) \quad z_0 \in \gamma_2([0,3])$

4ᵉ cas : Ω est convexe et γ est chemin polygonal fermé passant par les sommets $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, z_1 = z_{N+1}$



$$z_k, z_{k+1}, z_{k+2} \in \Omega \implies T_{z_k, z_{k+1}, z_{k+2}} \subset \Omega$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_3]} f(z)\,dz + \int_{[z_3,z_1]} f(z)\,dz$$

$$+ \int_{\overline{[z_1,z_3]}} f(z)\,dz + \int_{[z_3,z_4]} f(z)\,dz + \cdots + \int_{[z_{N-1},z_N]} f(z)\,dz + \int_{[z_N,z_1]} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{n=2}^{N-1} \underbrace{\int_{[z_1,z_n]+[z_n,z_{n+1}]+[z_{n+1},z_1]} f(z)\,dz}_{=0}$$

bord du triangle $T_{z_1,z_n,z_{n+1}} \subset \Omega$

5e cas : Ω convexe γ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On peut approcher γ par une suite de chemin polygonaux $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{\gamma_n} f(z)\,dz}_{=0} = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Dernière étape : Ω simplement connexe et γ un lacet de Ω.

Il existe $\phi : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$ continue

$$\forall t \in [0,1], \quad \phi(0,t) = z_1$$
$$\phi(1,t) = \gamma(t)$$

On peut approcher ϕ par $\phi_n : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}^1([0,1]; \Omega)$

$s \longmapsto \phi_n(s,\cdot) = \gamma_{n,s}(t)$

de la même façon qu'on approche γ par γ_n lacet $\mathcal{C}^1$!

tq pour tout $s \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_{n,s}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz$$

$$\gamma_{n,s}(t) = \phi_n(s,t) \qquad \gamma_s(t) = \phi(s,t).$$

On travaille avec les lacets $\gamma_{n,s}$ $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0,1]$

$\forall t \in [0,1]$, $\gamma_{n,0}(t) = z_1 \in \Omega$ ouvert

Il existe $\varepsilon > 0$ tq $B(z_1, \varepsilon) \subset \Omega$

$s \longmapsto \|\phi_n(s,\cdot) - z_1\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |\phi_n(s,t) - z_1|$

est continue sur $[0,1]$ comme composée de

$$\begin{array}{ccccc} s & \longmapsto & \phi_n(s,\cdot)-\zeta_1) & & \\ [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0,1],\Omega) & \xrightarrow{\|\ \|_{\mathcal{C}^0}} & \mathbb{R}_+ \end{array}$$

$$\|\phi_n(0,\cdot)-\zeta_1\|_{\mathcal{C}^0}=0$$

Il existe $\alpha>0$ tq $s\in[0,\alpha] \Rightarrow \|\phi_n(s,\cdot)-\zeta_1\|_{\mathcal{C}^0}\leq \frac{\rho}{2}$

$$\forall s\in[0,\alpha],\quad \underbrace{\gamma_{n,s}}_{\text{lacet}}([0,1]) \subset B(\zeta_1,\tfrac{\rho}{2}) \subset \underbrace{B(\zeta_1,\rho)}_{\substack{\text{ouvert}\\ \text{convexe}}}$$

$$\forall s\in[0,\alpha],\quad \int_{\gamma_{n,s}} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

On note $E = \left\{ s \in [0,1], \int_{\gamma_{n,s}} f(z)\,dz = 0 \right\}$

1) $E \neq \phi$

$s \leq \alpha \Rightarrow s \in E$.

2) E est fermé :

$s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} s \qquad s_k \in E$

$\gamma_{n,s_k} \longrightarrow \gamma_{n,s}$ dans $\mathcal{C}^1([0,1], \Omega)$

$$0 = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_{\gamma_{n,s_k}} f(z)\,dz}_{=0} = \int_{\gamma_{n,s}} f(z)\,dz \qquad s \in E.$$

3) <u>E est ouvert</u>

On suppose $s \in E$.

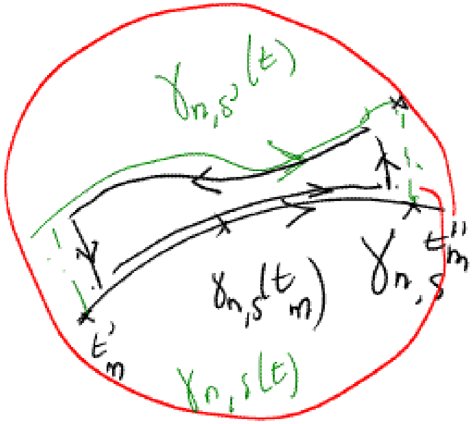
$\gamma_{n,s}([0,1])$ est un compact inclus dans Ω.

Il existe $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$ tq

$$\gamma_{n,s}([0,1]) \subset \bigcup_{m=1}^{N} B(\gamma_{n,s}(t_m),\varepsilon) \subset \Omega$$

Par continuité par rapport à s, il existe $\delta>0$ tq $|s'-s|<\delta \Rightarrow$

$$\gamma_{n,s'}([0,1]) \subset \bigcup_{m=1}^{N} B(\gamma_{n,s}(t_m),\varepsilon)$$



$$0=\int_{\Gamma_m} f(z)\,dz = \int_{t'_m}^{t''_m} f(\gamma_{n,s}(t))\,\gamma'_{n,s}(t)\,dt - \int_{t'_m}^{t''_m} f(\gamma_{n,s'}(t))\,\gamma'_{n,s'}(t)\,dt + \int_{[\gamma_{n,s}(t''_m),\,\gamma_{n,s'}(t''_m)]} f(z)\,dz + \int_{[\gamma_{n,s'}(t'_m),\,\gamma_{n,s}(t'_m)]} f(z)\,dt$$

Γ_m lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $B(\gamma_{n,s}(t_m),\varepsilon)$

$$\int_{\gamma_{n,s}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{n,s'}} f(z)\,dz = -\sum_{m=1}^{N}\Big[\int_{[\gamma_{n,s'}(t'_m),\,\gamma_{n,s}(t'_m)]} f(z)\,dz$$
$$+ \int_{[\gamma_{n,s}(t''_m),\,\gamma_{n,s'}(t''_m)]} f(z)\,dz\Big]$$

On peut prendre $t''_m = t'_{m+1}$

Cela donne une somme telescopique de somme nulle.

Pour $|s'-s| \leq \delta$, $\delta>0$, $\int_{\gamma_{n,s'}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{n,s}} f(z)\,dz = 0$

$s' \in E$.

1) 2) 3) $\Rightarrow$ $E = [0,1]$

et donc en particulier $\int_{\gamma_{n,1}} f(z)\,dz = 0$

On passe à la limite $n \to \infty$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

γ lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux de Ω simplement convexe. $\blacksquare$

Théorème de Cauchy global (version générale)

Ω ouvert quelconque
γ est un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que
$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$
Alors pour toute fonction holomorphe dans $\Omega \setminus z_0$ et continue dans Ω alors :
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cela contient le cas où Ω est simplement convexe.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\quad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z)$

par homotopie $\phi(s,t) = \gamma_s(t)$

$\gamma_1(t) = \gamma(t)$

$\gamma_0(t) = z_0$

Si γ_0 est un lacet constant, alors $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$\gamma_0([0,1]) = \{z_0\}$

On reviendra plus loin sur cette version générale.

III) Premières conséquences

3.1) Formule de Cauchy

Théorème : Si Ω est simplement connexe et γ est un lacet de Ω, alors pour toute fonction holomorphe f dans Ω et tout $z_0 \in \Omega \setminus \gamma([0,1])$ on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \times f(z_0)$$

Preuve. L'application $g_{z_0} : z \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ et continue dans Ω.

$$\int_\gamma g_{z_0}(z)\,dz = 0$$

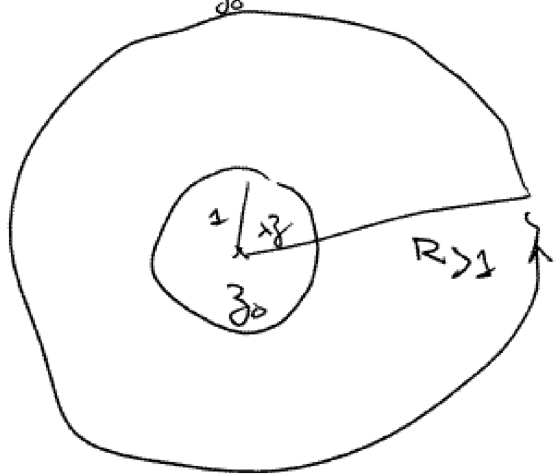
par le Théorème de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \underbrace{\frac{f(z_0)}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}}_{f(z_0)\times \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)} = 0$$

3.2 Théorème de Liouville

Théorème : Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est constante.

Démonstration : $z_0 \in \mathbb{C}$



$z \in D(z_0, 1)$

$\gamma_R(\theta) = z_0 + R e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$\underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(z')}{z' - z} \, dz'$$

$z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(z') \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{z' - z_0} \right] dz'$$

$$\frac{1}{z-z_0}\left[\frac{1}{z'-z}-\frac{1}{z'-z_0}\right]=\frac{1}{(z'-z)(z'-z_0)}$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\frac{1}{(z_0+Re^{i\theta}-z)\,Re^{i\theta}}\underbrace{Rie^{i\theta}d\theta}_{dz'}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\underbrace{\frac{1}{(z_0+Re^{i\theta}-z)}}_{\substack{\downarrow \text{ converge uniformément} \\ \text{sur } [0,2\pi] \text{ vers} \\ \frac{1}{Re^{i\theta}} \text{ quand } z\to z_0}}d\theta$$

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\frac{1}{Re^{i\theta}}\,d\theta$$

(Rq $\qquad f'(z_0)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^2}\,dz'$)

Si f est bornée par M on obtient

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M}{R}\, d\theta = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

$f'(z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) , \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$$

$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $\mathcal{C}^1$ de différentielle nulle

$\mathbb{R}^2$ est convexe

Donc $\tilde{f}$ est constante sur $\mathbb{R}^2$

f —————— sur $\mathbb{C}$

$\blacksquare$

<u>Théorème de d'Alembert</u> : Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $d^\circ P = r$

alors P a r racines comptées avec multiplicité.

<u>Preuve</u> : Par factorisation et récurrence sur r, il suffit de montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $d^\circ P = r \geq 1$ admet au moins une racine.

Par l'absurde supposons $d^\circ P = r \geq 1$

$\forall z \in \mathbb{C}, \; P(z) \neq 0$

$\frac{1}{P(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$$P(z) = \underbrace{a_r z^r}_{} + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_0$$

$$a_r \neq 0$$

$$|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_r|\,|z|^r \qquad \left|\frac{1}{P(z)}\right| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} \frac{1}{|a_r|\,|z|^r} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

$z \longmapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$

C'est une constante, qui est forcément nulle. Impossible $\boxed{}$

3.3 Analyticité des fonctions holomorphes

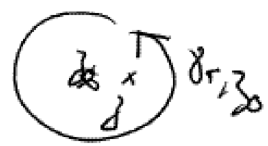
Théorème : Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors toute fonction holomorphe dans Ω est analytique dans Ω (i.e. développable en série entière au voisinage de z_0, pour tout $z_0 \in \Omega$).

On a de plus si $z_0 \in \Omega$, $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$

$$\gamma_{z_0,r}(\theta) = z_0 + re^{i\theta} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz$$

Preuve : $z_0 \in \Omega$ $\quad \overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$



Pour $z \in D(z_0, r)$ $\quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z')}{z'-z} \, dz'$

$$\overline{D(z_0,r)} \subset \underbrace{D(z_0,r_1)}_{\text{convexe}} \subset \Omega \qquad r_1 > r$$

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-z_0+(z_0-z)} = \frac{1}{z'-z_0} \times \frac{1}{1+\left(\frac{z_0-z}{z'-z_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{z'-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z_0-z}{z'-z_0}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z'-z_0)^{k+1}} \times (z-z_0)^k \qquad |z'-z_0| = r$$

Cette série converge normalement $(z'=z_0+re^{i\theta})$ dans $\overline{D\left(z_0,\frac{r}{2}\right)}$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r,z_0}} f(z') \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z'-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k \, dz'$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{i\theta}) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(re^{i\theta})^{k+1}} (z-z_0)^k \right]}_{\text{cv normale } / \ \theta} rie^{i\theta} d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \frac{1}{(re^{i\theta})^{k+1}} (z-z_0)^k \, rie^{i\theta} d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}} dz' \right] (z-z_0)^k$$

série cv si $|z-z_0| \leq \frac{r}{2}$

f est développable en série entière au voisinage de z_0 et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}} dz' \quad \blacksquare$$

<u>Corollaire</u> : Si Ω est simplement connexe et f est holomorphe dans Ω, la formule de Cauchy se généralise en :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)\, f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

<u>Preuve</u> : $\tilde{\gamma} = \gamma - \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)\, \gamma_{r,z_0}$ $\qquad \gamma_{r,z_0}(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$

On prend $r > 0$ assez petit pour que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega \setminus \gamma([0,1])$

et : $\forall z \in D(z_0, r)$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot) : \Omega \setminus \underbrace{\gamma([0,1])}_{\text{cont-hu.}} \to \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)} f(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \int_{\gamma_{r,z_0}} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

$$= f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z)$$

$$\underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}_{\mathrm{Cte}} f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z') \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(z' - z_0)^{k+1}} dz'$$

$$\overset{\text{cv normale}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \left[\int_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{k+1}} \, dz' \right] (z-z_0)^k$$

$$\left[\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\underbrace{(\gamma(t)-z_0)}_{|\gamma(t)-z_0| > r}{}^{k+1}} \gamma'(t) \, dt \right] \qquad |z-z_0| \leq \frac{r}{2}$$

3.4) Inégalité de Cauchy et Théorème de Lebesgue holomorphe

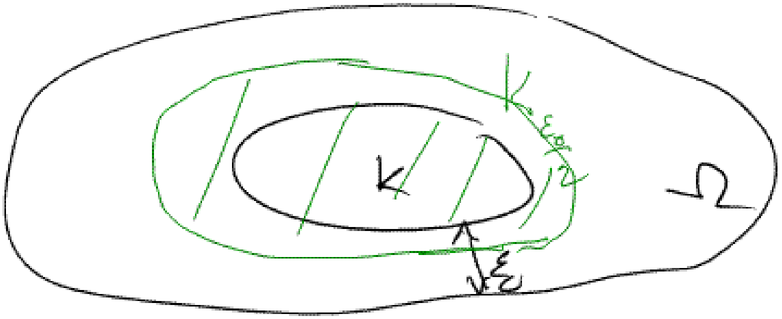
Proposition : Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in K,\quad \left| f^{(k)}(z) \right| \leq C_K^{k}\, k! \times \left[\sup_{z' \in K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}} |f(z')| \right]$$

avec $K_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C},\ d(z, K) \leq \varepsilon \}$

$$\varepsilon_0 = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$$

Toutes les dérivées sont estimées sur K à partir d'estimation de la fonction sur un compact un peu plus gros



Preuve : Si $z \in K$ $\quad \overline{D(z, \frac{\varepsilon_0}{2})} \subset \Omega$

En effet $\quad d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_0}{2}$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\gamma_{\frac{\varepsilon_0}{2}, z}} \frac{f(z')}{(z'-z)^{k+1}} \, dz'$$

$$\gamma_{\frac{\varepsilon_0}{2}, z}(\theta) = z + \frac{\varepsilon_0}{2} e^{i\theta}$$

$$= \frac{k!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \frac{\varepsilon_0}{2} e^{i\theta})}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} e^{i\theta}\right)^{k+1}} \frac{\varepsilon_0}{2} i e^{i\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \frac{\varepsilon_0}{2} e^{i\theta})}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} e^{i\theta}\right)^{k}} \, d\theta$$

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z+\frac{\varepsilon_0}{2}e^{i\theta})|}{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^k} d\theta$$

$$\leq k! \times \left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^k \times \left[\sup_{\zeta \in K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}} |f(\zeta)|\right]$$

$$C_K = \frac{2}{\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$$

Théorème (Lebesgue holomorphe)

(X, μ) espace mesuré

Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

$$h : X \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{tq}$$
$$(x, z) \longmapsto h(x, z)$$

1) Pour $z \in \Omega$ l'application $\begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto h(x,z) \end{array}$ est μ-mesurable

2) Pour μ-presque tout $x \in X$, l'application $\begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto h(x,z) \end{array}$ est holomorphe

3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g_K \in L^1(X; d\mu)$ tq
$\forall z \in K$, $|h(x,z)| \leq g_K(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$.

Alors l'application $\begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \displaystyle\int_X h(x,z)\, d\mu(x) \end{array}$ est holomorphe sur Ω et $$\frac{\partial}{\partial z} \int_X h(x,z)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\, d\mu(x)$$

Preuve : $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ et vérifions que $\int_X h(x,z)\, d\mu(x)$ est holomorphe dans $D(z_0, r)$

$K = \overline{D(z_0, r)}$ $\qquad \varepsilon_0 = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$

$$\forall z \in K, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial z}(x,z) \right| \leq 1!\, C_K^1 \max_{z' \in K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}} |h(x,z)|$$

Inégalité de Cauchy avec $k = 1$

$$\leq C_K \; g_{K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}}(x) \quad \mu \text{ presque tout } x \in X$$

$z = a + ib$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \left(\frac{\partial h}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = i\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}}_{=0}\right) = 0$$

$$\tilde{h}(x, a, b) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, h(x, a+ib) \\ \mathrm{Im}\, h(x, a+ib) \end{pmatrix} : X \times \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$$\forall\, a+ib \in K = \overline{D(z_0, r)},\ |D\tilde{h}(x, a, b)| \leq \underbrace{C_K\, g_{K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}}(x)}_{}$$ μ-presque partout

majorant intégrable de la différentielle (de toutes les dérivées partielles)

Le théorème de dérivation de Lebesgue (C^1)

nous dit $(a,b) \longmapsto \int_X \tilde{h}(x,a,b)\, d\mu(x)$

est $\mathcal{C}^1$ sur $D(z_0, r)$ avec

$$D\left[\int_X \tilde{h}(x,a,b)\, d\mu(x)\right] = \int_X D\tilde{h}(x,a,b)\, d\mu(x)$$

$z \longmapsto \int_X h(x,z)\, d\mu(x)$ est C^1 dans $D(z_0, r)$ et on

a :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} - i\frac{\partial}{\partial b}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\int_X h(x,z)\, d\mu(x)\right] = \int_X \frac{\partial}{\partial \bar{z}} h(x,z)\, d\mu(x) = 0$$

d'où l'holomorphe

De plus

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_X h(x,z)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} h(x,z)\, d\mu(x) \quad \blacksquare$$