Note Title — Chap II : Fonctions holomorphes, intégrales de chemin — 06/02/2019

I) Fonctions holomorphes

Ω ouvert de $\mathbb{C}$

Définition : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ le quotient

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

a une limite dans $\mathbb{C}$ quand $z \to z_0$, $z \neq z_0$.

On appelle cette limite dérivée complexe de f en z_0 et on la note :

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Autres notations : $\frac{df}{dz}(z_0)$, $\partial_z f(z_0)$

Notation :

$\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

$z = x+iy \longrightarrow (x,y)$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$x+iy \longmapsto f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

$P(x,y) = \mathrm{Re}\left[f(x+iy)\right] \qquad Q(x,y) = \mathrm{Im}\left[f(x+iy)\right]$

$\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \qquad \tilde{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Proposition : Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on a équivalence entre

1) f est holomorphe dans Ω.

2) $\tilde{f}$ est différentiable en tout point de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et sa différentielle $D\tilde{f}_{(x_0,y_0)} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : 1) $\Rightarrow$ 2) Si f est holomorphe alors pour $z_0 = x_0 + i y_0 \in \Omega$ on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}]{} f'(z_0)$$

$$f(z) - f(z_0) = \left[f'(z_0) + o_{z \to z_0}(1) \right] (z - z_0)$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o_{z \to z_0}(|z - z_0|)$$

$$f(x+iy) = f(x_0 + iy_0) + \Big[\underbrace{\operatorname{Re} f'(z_0)}_{a} + i \underbrace{\operatorname{Im} f'(z_0)}_{b} \Big] \Big[(x - x_0) + i(y - y_0) \Big] + o_{(x,y) \to (x_0, y_0)}\left(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} \right)$$

$$= f(x_0 + iy_0) + \left[a(x - x_0) - b(y - y_0) \right] + i \left[b(x - x_0) + a(y - y_0) \right]$$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \qquad + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\right)$$

$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} a(x-x_0) - b(y-y_0) \\ b(x-x_0) + a(y-y_0) \end{pmatrix} + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\right)$$

$$= \tilde{f}(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\right)$$

$\tilde{f}$ est différentiable en (x_0,y_0), pour tout $\underset{\sim x_0+iy_0}{(x_0,y_0)} \in \Omega$, et sa différentielle a bien la forme voulue.

<u>2) ⟹ 1)</u> : Supposons $\tilde{f}$ différentiable en tout point et $D\tilde{f}_{(x_0,y_0)}$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\right)$$

$$f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$$

$$f(x+iy) = f(x_0+iy_0) + (a+ib)\left[(x-x_0)+i(y-y_0)\right] + o\left(\left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right|\right)$$

$$f(z)-f(z_0) = (a+ib)(z-z_0) + \underset{z\to z_0}{o}\left(|z-z_0|\right)$$

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a+ib \in \mathbb{C}$$

$\square$

Remarque : 1) L'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ qui correspond à la multiplication par $a+ib$ est
- soit l'application nulle si $a^2+b^2=0$
- soit la matrice d'une similitude vectorielle directe $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2) L'application affine tangente en z_0 d'une fonction holomorphe donnée par :

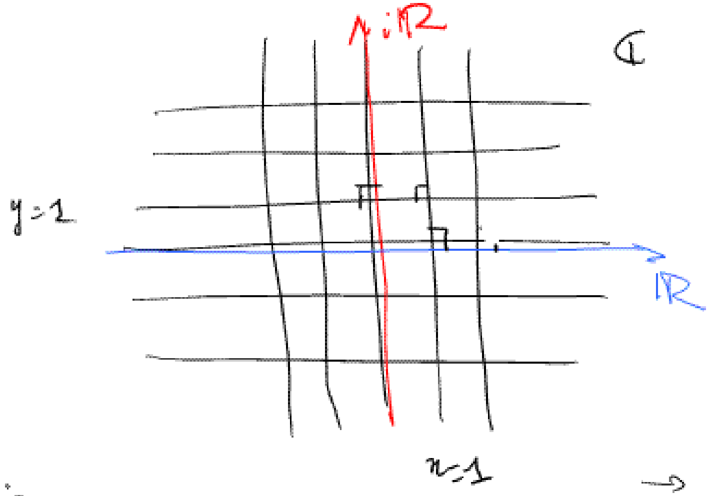
$$z \longmapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

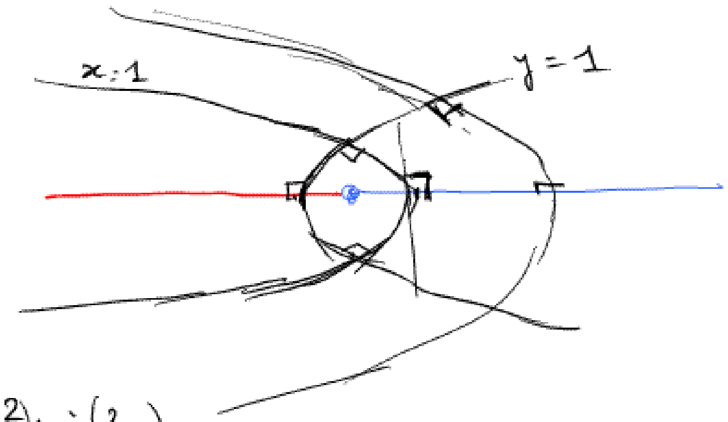
est
- soit l'application constante $z \mapsto f(z_0)$ si $f'(z_0) = 0$
- soit une similitude directe dont le rapport est donné par $|f'(z_0)|$ et l'angle par $\arg(f'(z_0))$ si $f'(z_0) \neq 0$

3) Une similitude directe préserve les angles orientés

$z \longmapsto z^2$ holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

$$x+iy \longmapsto x^2-y^2+2ixy$$





$x^2-1+2ix$ $\quad\to\quad$ $(1-y^2)+i(2y)$

$x^2-1=\frac{1}{4}(2x)^2-1$ $\qquad$ $1-y^2=1-\frac{1}{4}(2y)^2$

Corollaire : Formule de Cauchy-Riemann

Si $f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$, $f:\Omega\mapsto\mathbb{C}$, a b D

f est holomorphe ssi P, Q sont différentiables

dans Ω avec : $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y} \; ; \; \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}$

$$D\tilde{f}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

<u>Proposition</u> : 1) f, g holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les fonctions $\lambda f + g : \Omega \to \mathbb{C}$ et $f \times g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont holomorphe. De plus si g ne s'annule pas dans Ω alors $\frac{f}{g} : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

$$(\lambda f + g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \times g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

2) Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ est holomorphe et $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors la composée $g \circ f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec :

$$(g \circ f)'(z_0) = g'[f(z_0)]\, f'(z_0)$$

3) Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est holomorphe et bijective alors $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ est holomorphe avec

avec $f' \neq 0$

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(z_0)]}$$

on reviendra plus tard sur $f' \neq 0$

<u>Preuve</u> : 1) Pour le produit on écrit :

$$(f \times g)(z) - (f \times g)(z_0) = [f(z) - f(z_0)]\, g(z) + f(z_0) \times [g(z) - g(z_0)]$$

On divise par $z - z_0$ et on passe à la limite quand
$z \underset{z \neq z_0}{\longrightarrow} z_0$.

2) Soit $z_0 \in \Omega$. On peut écrire

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underset{z \to z_0}{o}(|z - z_0|)$$

$$|f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0)(z - z_0)| + \underset{z \to z_0}{o}(|z - z_0|) \leq C_\delta |z - z_0|$$

si $|z - z_0| \leq \delta$
avec $\delta > 0$ assez petit

$$g \circ f(z) - g \circ f(z_0) = g[f(z)] - g[f(z_0)]$$

$z \to z_0 \Rightarrow f(z) \to f(z_0)$

$$\overset{g \text{ hol ds } \Omega_2}{=} g'(f(z_0)) \times [f(z) - f(z_0)] + \underset{z \to z_0}{o}(|f(z) - f(z_0)|)$$

$$= g'(f(z_0)) \times \left[f'(z_0)(z-z_0) + o_{z\to z_0}(|z-z_0|) \right]$$
$$+ o_{z\to z_0}\left(C_f |z-z_0| \right)$$

$$(g\circ f)(z) = (g\circ f)(z_0) + g'[f(z_0)] \times f'(z_0)\,(z-z_0) + o_{z\to z_0}(|z-z_0|)$$

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} \frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{z-z_0} = g'[f(z_0)] \times f'(z_0) .$$

3) $z_0' = f(z_0)$ $\qquad z' = f(z)$

$$\lim_{\substack{z'\to z_0' \\ z'\neq z_0'}} \frac{f^{-1}(z') - f^{-1}(z_0')}{z' - z_0'} = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0')} = \frac{1}{f'(z_0)} \in \mathbb{C}$$

Notation : Pour $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{C})$ Ω ouvert de $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

$z = x + iy$

on note

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2}$$

Proposition : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe ssi f est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ dans Ω

Preuve : C'est une autre façon d'écrire les relations de Cauchy Riemann

$$f(x+iy) = \tilde{f}(x,y) = P(x,y) + i\,Q(x,y) \qquad P, Q \ \mathcal{C}^1$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[P + iQ\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\in \mathbb{R}} + \frac{i}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \qquad \square$$

Rq :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar z} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar z}\right)$$

Si f est holomorphe

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial z}(x+iy) + 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial z} + 0$$

Application aux fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}$

- $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ $\qquad P(x,y) = \sum_{\alpha+\beta \leq n} c_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta \qquad c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$

$z = x+iy \qquad x = \mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar z}{2} \qquad y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar z}{2i}$

$$x^\alpha = \left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} z^{\alpha_1} \bar z^{\alpha_2}$$

$$y^\beta = \frac{1}{2^\beta\, i^\beta} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!} z^{\beta_1} (-\bar z)^{\beta_2}$$

$$P = \sum_{\alpha+\beta \leq n} a_{\alpha\beta}\, z^\alpha \bar z^\beta \qquad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z^\alpha \bar z^\beta\right) = \alpha z^{\alpha-1} \bar z^\beta \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(z^\alpha \bar z^\beta\right) = z^\alpha \beta \bar z^{\beta-1}$$

P est fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

C'est un polynôme holomorphe ssi $\frac{\partial}{\partial \bar z} P \equiv 0$

ssi $a_{\alpha\beta} = 0$ pour $\beta \neq 0$
(pas de puissance de $\bar{z}$).

$P \in \mathbb{C}[Z]$ pour un polynôme holomorphe
Polynôme complexe de la variable complexe Z.

- Autre exemples : • $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$

f est holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$

• $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ ne sont pas holomorphes.

$x^2+y^2 = z\bar{z}$ $\quad x^2 = \frac{1}{4}(z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z})$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x) = \frac{1}{2} \neq 0$$

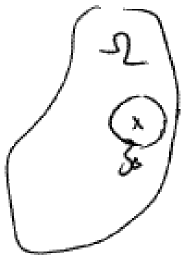
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

II] Fonctions analytiques

Ω ouvert de $\mathbb{C}$

Définition : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, f admet un développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ avec rayon de convergence $R_{z_0} > 0$.

vraie dans $\{z \in \mathbb{C},\ |z-z_0| < R_{z_0}\}$



Une combinaison linéaire et un produit de fonctions analytiques sur Ω sont analytiques sur Ω (vient des opérations sur les séries entières).

- Conséquence : Si $P \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_N]$ et $f_1, \dots, f_N$ sont analytiques sur Ω alors $P(f_1, \dots, f_N) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N \leq m} c_{\alpha_1 \dots \alpha_N} f_1^{\alpha_1} \dots f_N^{\alpha_N}$

est analytique sur Ω.

Rappel : • Les polynômes de z, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \cos z$, $z \mapsto \sin z$ sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

$$P(z) = \sum_{\alpha \leq d^\circ P} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha}(z_0)\,(z-z_0)^\alpha \qquad \text{somme finie } R_{z_0} = +\infty$$

$$e^z = e^{z_0}\, e^{(z-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}(z-z_0)^n}{n!} \qquad R_{z_0} = +\infty$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

• $z \longmapsto \dfrac{1}{z-a}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$z_0 \neq a$ $$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a}\,\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0-a}}$$

$$= \frac{1}{z_0 - a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0 - a}\right)^n$$

pour $\left|\frac{z - z_0}{z_0 - a}\right| < 1$ $\quad |z - z_0| < |z_0 - a|$

$$R_{z_0} = |z_0 - a|$$

- Une fraction rationnelle $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$

Le théorème de d'Alembert permet d'écrire

$$Q(z) = a \prod_{k=1}^{d^\circ Q} (z - z_k) \qquad a \neq 0$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{a} P(z) \times \prod_{k=1}^{d^\circ Q} \frac{1}{z - z_k}$$

produit de fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$

Proposition. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique vérifie

1) f est holomorphe dans Ω.

2) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour $|z-z_0| < R_{z_0}$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n$$

et par récurrence $$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$$

3) En particulier $$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) = \frac{k!}{0!} a_k = k!\, a_k$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0) (z-z_0)^n \quad \text{pour } |z-z_0| < R_{z_0}$$

Rq : 1) Une fonction analytique est $\mathcal{C}^\infty$ et égale au voisinage de tout point à sa série donné par le développement de Taylor.

2) (f analytique sur Ω) $\Longrightarrow$ (f holomorphe sur Ω)

$\Longleftarrow$ <= voir chapitres suivants.

concerne toutes les dérivées et le dév en séries entières.

existence d'une dérivée complexe

Rappel : Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$

Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^{m'})$ tq

i) F_n converge vers F localement uniformément $F \in \mathcal{C}^0(\Omega;\mathbb{R}^{m'})$

ii) DF_n converge vers L —— $L \in \mathcal{C}^0(\Omega;\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^{m'}))$

alors $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{m'})$ et $DF = L$.

Cf cours de calcul différentiel.

Preuve de la proposition :

On suppose f analytique sur Ω : Pour tout $z_0 \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{pour} \quad |z-z_0| < R_{z_0}$$

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n \right] = \lim_{N\to\infty} P_N(z) \qquad R_{z_0} > 0.$$

convergence uniforme sur $\overline{D(z_0, r)}$ $r < R_{z_0}$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$$

$$F_N(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, P_N(x+iy) \\ \mathrm{Im}\, P_N(x+iy) \end{pmatrix} \qquad F_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \tilde{f} \quad \text{loc uniformément ds } D(z_0, R_{z_0})$$

$P_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$ est un polynôme holomorphe.

$$\frac{\partial P_N}{\partial x} = \frac{\partial P_N}{\partial z} = \sum_{n=0}^{N} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$\frac{\partial P_N}{\partial y} = i \frac{\partial P_N}{\partial z} = i \sum_{n=0}^{N} n a_n (z-z_0)^{n-1} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

La série entière dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ a le même rayon de convergence R_{z_0} que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Donc $\frac{\partial P_N}{\partial x}, \frac{\partial P_N}{\partial y}$ $\left(\frac{\partial \operatorname{Re} P_N}{\partial x}, \frac{\partial \operatorname{Im} P_N}{\partial x}, \dots\right)$ converge localement uniformément dans $D(z_0, R_{z_0})$.

La suite $F_N : \Omega \to \mathbb{R}^2$ a pour différentielle

$$DF_N = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \operatorname{Re} P_N}{\partial x} & \dfrac{\partial \operatorname{Re} P_N}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \operatorname{Im} P_N}{\partial x} & \dfrac{\partial \operatorname{Im} P_N}{\partial y} \end{pmatrix}$$ converge localement uniformément

On en déduit que $\mathcal{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$ est $\mathcal{C}^1$ dans $D(z_0, R_{z_0})$ et que sa différentielle est

$$D\mathcal{F}(x,y) = \lim_{N\to\infty} DF_N .$$

On obtient par passage à la limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n \right) = i \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

pour $z = x+iy$ avec $|z-z_0| < R_{z_0}$

$f \in \mathcal{C}^1(D(z_0, R_{z_0}); \mathbb{C})$ et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)(z) = 0$$

f est holomorphe dans $D(z_0, R_{z_0})$ et comme c'est vrai pour $z_0 \in \Omega$, f est holomorphe dans Ω.

On a aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

En particulier $\frac{\partial f}{\partial z}$ est développable en série entière en z_0, avec le même rayon de convergence $R_{z_0} > 0$, ce pour tout $z_0 \in \Omega$.

Par récurrence montrons que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{C})$

et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}$ est analytique

avec $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$

- $\underline{k=0}$: f est holomorphe

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{C})$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-1)!} a_n (z-z_0)^{n-1}$

- Supposons $f \in \mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{C})$ et $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}$ holomorphe

$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial z^{k+1}}(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!} a_n (z-z_0)^{n-k-1}$ pour $|z-z_0| < \rho_{z_0}$

pour tout $z_0 \in \Omega$.

$$\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{k_1} = \sum_{k'=0}^{k_1} C_{k_1}^{k'} \frac{\partial^{k_1-k'}}{\partial z^{k_1}} \frac{\partial^{k'}}{\partial \bar{z}^{k'}}$$

Comme f est holomorphe $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$

$$\frac{\partial^{k_1} f}{\partial x^{k_1}}(z) = C^0_{k_1} \frac{\partial^{k_1} f}{\partial z^{k_1}}(z) = \frac{\partial^{k_1} f}{\partial z^{k_1}}(z)$$

De même $\frac{\partial^k f}{\partial y^{k_2} \partial x^{k_1}}(z) = i^{k_2} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z)$ pour $k_1 + k_2 = k$

Comme $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}$ est holomorphe par hypothèse de récurrence. Elle est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Toutes les dérivées $\frac{\partial^k f}{\partial y^{k_2} \partial x^{k_1}}$ pour $k_1 + k_2 = k$

sont $\mathcal{C}^1$ et f est $\mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{C})$.

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^k}{\partial z^k} f\right](z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}\right]$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) a_n (z-z_0)^{n-k-1}$$

Fin de la récurrence.

Dernier point :

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) = k!\, a_k + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z_0 - z_0)^{n-k}}_{=0}$$

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0)$$

f analytique sur Ω $\Rightarrow$ f holomorphe $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.

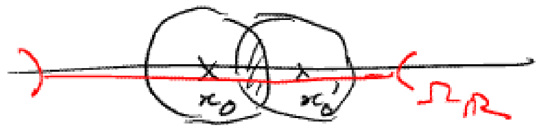
$\Leftarrow$ plus tard $\qquad\qquad \not\Leftarrow \quad f(x,y) = x = \mathrm{Re}\, z$

Ω ouvert de $\mathbb{C}$

Définition : Soit $\Omega_{\mathbb{R}}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)
On dit que f est analytique réelle si pour tout

$x_0 \in \Omega_{\mathbb{R}}$, f est égale à son développement en série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ pour $x \in \left]x_0 - R_{x_0}, x_0 + R_{x_0}\right[\subset \Omega_{\mathbb{R}}$ avec $R_{x_0} > 0$.

Rq : En fait la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(z-x_0)^k$ converge pour $|z - x_0| < R_{x_0}$. Dire que f est analytique réelle revient à dire qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ tq $\Omega \cap \mathbb{R} = \Omega_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{f}$ holomorphe dans Ω tq : $\tilde{f}|_{\Omega_{\mathbb{R}}} = f$. On verra plus loin que $\tilde{f}$ est bien définie indépendamment de x_0



$$f \text{ analytique réelle} \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{\mathbb{R}}; \mathbb{C})$$

$$\not\Longleftarrow$$

<u>Exemple des fonctions plates</u> :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*; \mathbb{R})$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \to +\infty} e^{-u} = 0 = f(0)$$

f est continue

Pour $x > 0$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \to +\infty} u^2 e^{-u} = 0 = \lim_{x \to 0^-} f'(0)$$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f'(0) = 0$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $\quad f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x}}$

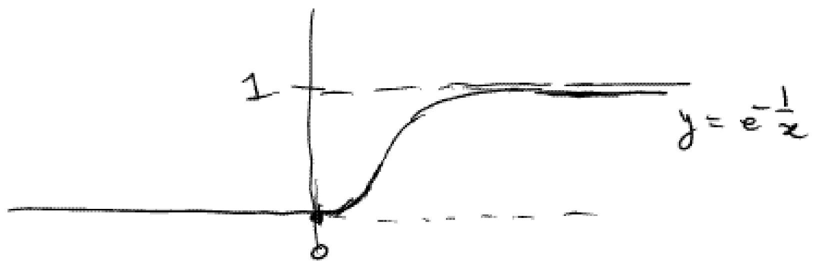
$$\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f^{(k)}(x)$$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left(\forall k \in \mathbb{N},\ \underline{f^{(k)}(0) = 0} \right)$$

Le développement en série entière de f en 0 est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} (x - x_0)^k = 0 \quad \text{avec rayon de cv } +\infty$$

c'est différent de $f(x)$ pour $x > 0$, aussi petit qu'on veut.



II] Intégrale de chemin

2.1 Un peu de topologie

Définition : Si Ω est un ouvert ou plus généralement une partie de $\mathbb{C}$ (ou plus généralement d'un espace métrique, topologique X) et si $z_0, z_1 \in \Omega$ on appelle chemin ou arc allant de z_0 à z_1 une application continue de $[0,1]$ (ou $[a,b]$, $a<b$) dans Ω tq $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$ ($\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z_1$).

$\gamma : [0,1] \to X$ continue

$\forall t \in [0,1], \ \gamma(t) \in \Omega \qquad \gamma(0) = z_0 \quad \gamma(1) = z_1$

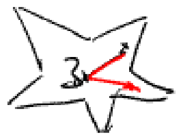
Définition : On dit que partie Ω ouvert de X espace métrique ($\mathbb{C}$) est connexe par arcs si pour tout $z_0, z_1 \in \Omega$ il existe un chemin allant de z_0 à z_1

Exemples : Dans un espace vectoriel normé

- les convexes sont connexes par arcs

$$\left.\begin{array}{l} z_0 \in C \\ z_1 \in C \end{array}\right\} \Rightarrow [z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + t z_1,\ t \in [0,1]\} \subset C$$

- les boules sont connexes par arcs (elles sont convexes)
- Les ensembles étoilés E tq il existe $z_0 \in E$ tq : $\forall z \in E,\ [z_0, z] \subset E$



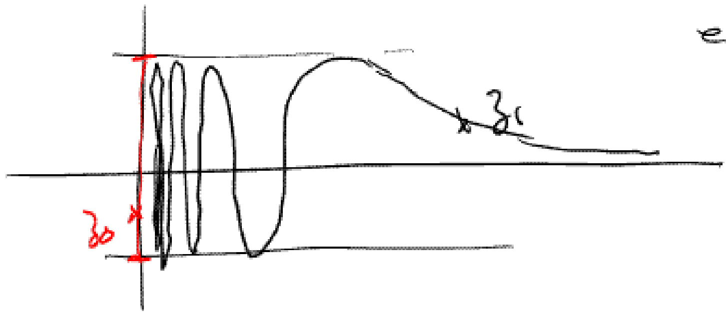
$$z_1 \to z_2 \qquad z_1 \xrightarrow{t \in [0, \frac{1}{2}]} z_0 \qquad z_0 \xrightarrow{t \in [\frac{1}{2}, 1]} z_2$$

Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe
$\not\Leftarrow$

Dans $\mathbb{R}^2$ on regarde $E = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right), x > 0 \right\}$

E est connexe par arcs, donc connexe

Donc $\overline{E} = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right), x > 0 \right\} \cup \left\{ (0,y), y \in [-1,1] \right\}$ est connexe.



Mais $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

<u>Proposition</u> : Les <u>ouverts connexes</u> d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ (en particulier $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$) sont connexes par arcs.

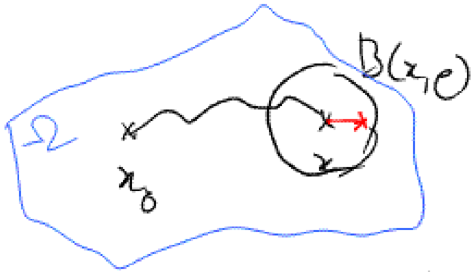
Preuve : Ω ouvert connexe non vide et soit $x_0 \in \Omega$.

$$E = \{ x \in \Omega,\ \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \Omega),\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x \}$$

1) E est un ouvert de Ω :

Si $x \in E$, $x \in \Omega$ avec Ω ouvert et il existe $\varrho > 0$ tq $B(x, \varrho) \subset \Omega$.

De plus il existe $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \Omega)$ tq $\gamma(0) = x_0$
$\gamma(1) = x$



Pour $x' \in B(x,\varrho)$ on prolonge le chemin γ par le segment $[x, x']$

$\forall x' \in B(x,\varrho)$, $x' \in E$

$\forall x \in E, \exists \varrho > 0, E \supset B(x,\varrho)$

E est un ouvert

2) <u>E est un fermé de Ω.</u>

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers $x \in \Omega$.

Comme $x \in \Omega$, Ω ouvert, il existe $\rho > 0$ tq $B(x,\rho) \subset \Omega$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N$, $x_n \in B(x,\rho)$

Avec $n = N$, $x_N \in E$, il existe $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1];\Omega)$ tq $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_N$. On prolonge ce chemin par le segment qui va de x_N à x.

$x \in E$.

3) E est ouvert et fermé dans Ω qui est connexe

$E \neq \emptyset$ car $x_0 \in E$

Donc $E = \Omega$ $\blacksquare$

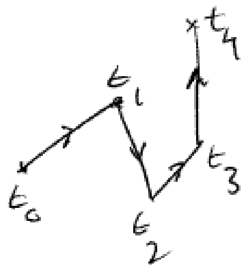
Proposition : Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ (ou d'un evn) et si $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1];\Omega)$ vérifie $\gamma(0)=x_0$; $\gamma(1)=x_1$, $x_0, x_1 \in \Omega$ alors il existe deux suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n^P)_{n\in\mathbb{N}}$ tq

- pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n \in \mathcal{C}^1([0,1];\Omega) \qquad \gamma_n(0)=x_0 \qquad \gamma_n(1)=x_1$$

γ_n^P chemin polygonal $\quad \gamma_n^P(0)=x_0 \quad \gamma_n^P(1)=x_1$

Il existe $0=t_0<t_1<\dots<t_{N_n}=1 \qquad \gamma_n^P \in \mathcal{C}^1([t_k,t_{k+1}];\Omega)$

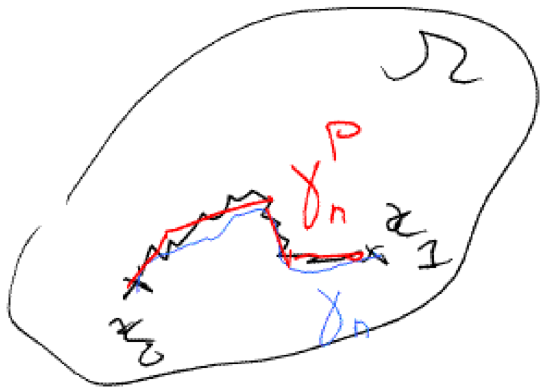


$$\forall t \in]t_k,t_{k+1}[\quad \dot{\gamma}_n^P(t) = v_k$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,1]} \|\gamma(t)-\gamma_n(t)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\gamma-\gamma_n\|_{\mathcal{C}^0} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma-\gamma_n^P\|_{\mathcal{C}^0} = 0$$

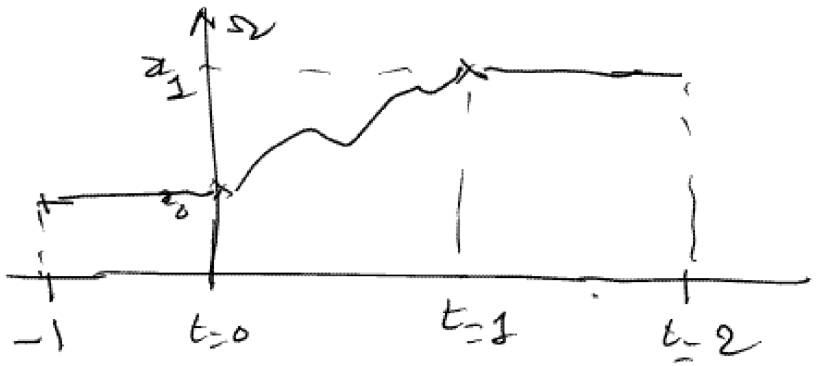
On peut approcher en norme $\mathcal{C}^0$ un chemin γ allant de x_0 à x_1 par une suite de chemin $\mathcal{C}^1$ polygonaux allant de x_0 à x_1



Preuve : Soit $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1]; \Omega)$ tq $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(0) = x_0 & \text{si } t \in [-1,0] \\ \gamma(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ \gamma(1) = x_1 & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

chemin allant de x_0 à x_1 sur l'intervalle $[-1,2]$



Pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$ et $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ on pose

$$\gamma_\delta(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \tilde{\gamma}(s)\, ds$$

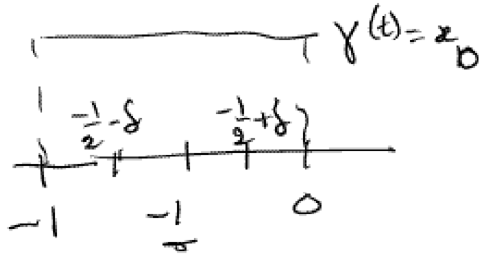
$\gamma \in \mathcal{C}^0([t-\delta, t+\delta]; \Omega)$
intégrale de Riemann
bien définie pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$= \frac{1}{2\delta} \left[\int_0^{t+\delta} \tilde{\gamma}(s)\, ds - \int_0^{t-\delta} \tilde{\gamma}(s)\, ds \right]$$

$$\gamma_\delta \in \mathcal{C}^1([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}]; \mathbb{C})$$

$$\frac{d\gamma_\delta}{dt}(t) = \frac{1}{2\delta} \left[\tilde{\gamma}(t+\delta) - \tilde{\gamma}(t-\delta) \right]$$

- $$\gamma_\delta\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\frac{1}{2}-\delta}^{-\frac{1}{2}+\delta} \tilde{\gamma}(s)\, ds$$



$$= \frac{1}{2\delta}\int_{-\frac{1}{2}-\delta}^{-\frac{1}{2}+\delta} x_0\, ds = x_0$$

$\delta \leq \frac{1}{2}$

de même $$\gamma_\delta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2\delta}\int_{\frac{3}{2}-\delta}^{\frac{3}{2}+\delta} \underbrace{\tilde{\gamma}(s)}_{=x_1}\, ds = x_1$$

γ_δ est chemin $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ qui reste dans $\mathbb{C}$ tq $\gamma_\delta\left(-\frac{1}{2}\right) = x_0$ $\gamma_\delta\left(\frac{3}{2}\right) = x_1$

- $$\|\gamma_\delta - \tilde{\gamma}\|_{\mathcal{C}^0\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]; \mathbb{C}\right)} = \sup_{t\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]} |\gamma_\delta(t) - \tilde{\gamma}(t)|$$

$$\gamma_\delta(t) - \tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta} \tilde{\gamma}(s)\,ds - \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta} \underbrace{\tilde{\gamma}(t)}_{cte/s}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta} \left[\tilde{\gamma}(s) - \tilde{\gamma}(t)\right] ds$$

$$|\gamma_\delta(t) - \tilde{\gamma}(t)| \leq \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta} \underbrace{|\tilde{\gamma}(s) - \tilde{\gamma}(t)|}_{\sup\limits_{\substack{|t_0-t_1|\leq\delta \\ t_0,t_1\in[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}} |\tilde{\gamma}(t_1) - \tilde{\gamma}(t_0)|}\, ds$$

(*) $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $|\gamma_\delta(t) - \tilde{\gamma}(t)| \leq \sup\limits_{\substack{|t_0-t_1|\leq\delta \\ t_0,t_1\in[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}} |\tilde{\gamma}(t_1) - \tilde{\gamma}(t_0)| = \omega_{\tilde{\gamma}}(\delta)$

$\tilde{\gamma}$ est uniformément continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_{\tilde{\gamma}}(\delta) = 0$$

$$(*) \implies \|\gamma_\delta - \tilde{\gamma}\|_{\mathcal{C}^0([-\frac{1}{2},\frac{3}{2}];\mathbb{C})} = \sup_{t\in[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]} |\gamma_\delta(t)-\tilde{\gamma}(t)| \leq \omega_{\tilde{\gamma}}(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0^+]{} 0$$

- $\underbrace{\tilde{\gamma}([-\frac{1}{2},\frac{3}{2}])}_{\text{compact}} \subset \Omega$ $\qquad \Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$

compact comme image du compact $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ par $\tilde{\gamma}$ qui est continue.

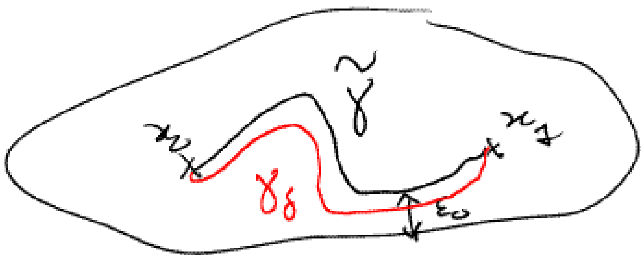
$\mathbb{C}\setminus\Omega$ fermé de $\mathbb{C}$

$$\underbrace{\tilde{\gamma}([-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}])}_{\text{compact}} \cap \underbrace{(\mathbb{C}\setminus\Omega)}_{\text{fermé}} = \emptyset$$

$$\varepsilon_0 = d\left(\tilde{\gamma}([-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}]);\ \mathbb{C}\setminus\Omega\right) = \inf_{\substack{z\in\tilde{\gamma}([-\frac{1}{2},\frac{3}{2}])\\ z'\in\mathbb{C}\setminus\Omega}} |z-z'| > 0$$

Si $\omega_{\tilde\gamma}(\delta) < \varepsilon_0$ alors

$$|\gamma_\delta(t) - \tilde\gamma(t)| \leq \omega_{\tilde\gamma}(\delta) < \varepsilon_0 = d\left(\tilde\gamma([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}]) ; \mathbb{C}\setminus\Omega\right)$$



Si $\omega_{\tilde\gamma}(\delta) < \varepsilon_0$ alors $\gamma_\delta(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}]$

Comme $\lim_{\delta \to 0} \omega_{\tilde\gamma}(\delta) = 0$, il existe δ_0 tq

pour $\delta \leq \delta_0$, $\gamma_\delta \in \mathcal{C}^1([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}] ; \Omega)$

$\gamma_\delta(-\tfrac{1}{2}) = x_0$ $\quad\gamma_\delta(\tfrac{3}{2}) = x_1$

$\gamma_\delta(t) = x_0$ si $t \in [-\tfrac{1}{2}, -2\delta]$ $\quad\gamma_\delta(t) = x_1$ si $t \in [1+2\delta, \tfrac{3}{2}]$

On prend $\gamma_n(t) = \gamma_{\delta = \frac{1}{n}}\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)t - \frac{2}{n}\right) \qquad t \in [0,1]$

$\gamma_n \in \mathcal{C}^1([0,1]\,;\,\Omega) \qquad$ pour $n \geqslant N_0$

$$\gamma_n(0) = \gamma_{\delta=\frac{1}{n}}\Big(\underbrace{-2 \times \frac{1}{n}}_{=\delta}\Big) = x_0$$

$$\gamma_n(1) = \gamma_{\delta=\frac{1}{n}}\Big(1 + \underbrace{2 \times \frac{1}{n}}_{=\delta}\Big) = x_1$$

$$\begin{aligned}
|\gamma_n(t) - \gamma(t)| &= \left|\gamma_{\delta=\frac{1}{n}}\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)t - \frac{2}{n}\right) - \gamma(t)\right| \\
&\leqq \left|\gamma_{\delta=\frac{1}{n}}\left(t + \frac{1}{n}(4t-2)\right) - \tilde{\gamma}\left(t+\frac{1}{n}(4t-2)\right)\right| \\
&\quad + \left|\tilde{\gamma}\left(t+\frac{1}{n}(4t-2)\right) - \gamma(t)\right|
\end{aligned}$$

$$\forall t \in [0,1], \quad |\gamma_n(t) - \gamma(t)| \leq \underbrace{\| \gamma_{\delta=\frac{1}{n}} - \tilde{\gamma} \|_{\mathcal{C}^0}}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}} + \underbrace{\sup_{t' \in [0,1]} |\tilde{\gamma}(t' + \tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{2} t' - 2)) - \gamma(t')|}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}}.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \| \gamma_n - \gamma \|_{\mathcal{C}^0} = 0$$

2) La suite $(\gamma_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ de chemin polygōnaux.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec la première partie on sait trouver un chemin γ_{k_n} avec k_n assez grand tq :

$$\gamma_{k_n} \in \mathcal{C}^1([0,1], \Omega) \quad \gamma_{k_n}(0) = x_0 \quad \gamma_{k_n}(1) = x_1$$

$$\| \gamma_{k_n} - \gamma \|_{\mathcal{C}^0} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\gamma_{k_n}(t) = x_0 + \int_0^t \underbrace{\frac{d\gamma_{k_n}}{dt}(s)}_{\text{fonction continue } [0,1] \to \mathbb{C}} ds$$

Il existe $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ constante par morceaux tq $\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{d\gamma_{k_n}}{dt}(t) - f(t) \right| \leq \frac{1}{2n}$

$$\gamma_n^p(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\, ds$$

chemin polygonal tq $\gamma_n^p(0) = x_0$

$$|\gamma_n^p(t) - \gamma(t)| \leq |\gamma_n^p(t) - \gamma_{k_n}(t)| + |\gamma_{k_n}(t) - \gamma(t)|$$

$$\leq |\gamma_n^p(t) - \gamma_{k_n}(t)| + \frac{1}{2n}$$

$$\gamma_n^P(t) - \gamma_{b_{2n}}(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\,ds - \left[x_0 + \int_0^t \frac{d\gamma_{b_n}}{dt}(s)\,ds\right]$$

$$\left|\gamma_n^P(t) - \gamma_{b_{2n}}(t)\right| \leq \int_0^t \left| f(s) - \frac{d\gamma_{b_{2n}}}{dt}(s)\right| ds$$

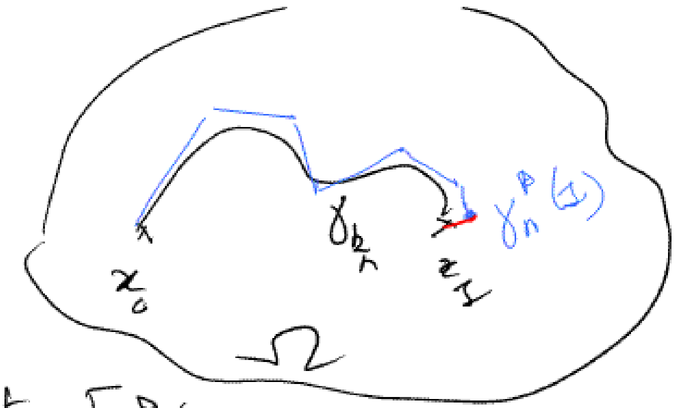
$$\leq \underbrace{(t-0)}_{\leq 1} \times \underbrace{\sup_{s\in[0,1]} \left| f(s) - \frac{d\gamma_{b_n}}{dt}(s)\right|}_{\leq \frac{1}{2n}}$$

On a montré $\forall t \in [0,1]$, $\left|\gamma_n^P(t) - \gamma(t)\right| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_n^P - \gamma\|_{\mathcal{C}^0} = 0$$

Dernier point $\gamma_n^P(1) = x_0 + \int_0^1 f(s)\,ds$

$$\Big| \gamma_n^p(1) - \underbrace{\gamma_{k_n}(1)}_{x_1} \Big| \leq \frac{1}{2n}$$



On rajoute à γ_n^p le segment $[\gamma_n^p(1), x_1]$ pour avoir un chemin polygonal qui va jusqu'à $x_1 = \gamma(1)$

Conséquence : Dans $\mathbb{C}$ (ou dans un evn) un ouvert connexe est
1) connexe par arcs
2) connexe par arcs $\mathcal{C}^1$
3) connexe par arcs polygonal.

Simple connexité

Ω ouvert de $\mathbb{C}$

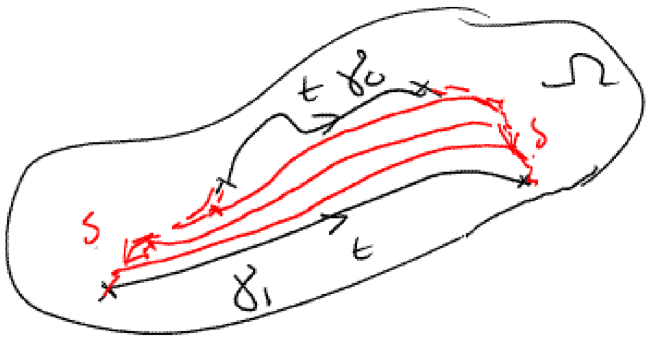
Définition On dit que 2 chemins $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{C}^0([0,1];\Omega)$ sont homotopes si il existe

$$\phi : [0,1]\times[0,1] \to \Omega \quad \text{continue}$$

$$\forall t \in [0,1], \quad \begin{cases} \phi(0,t) = \gamma_0(t) \\ \phi(1,t) = \gamma_1(t) \end{cases}$$

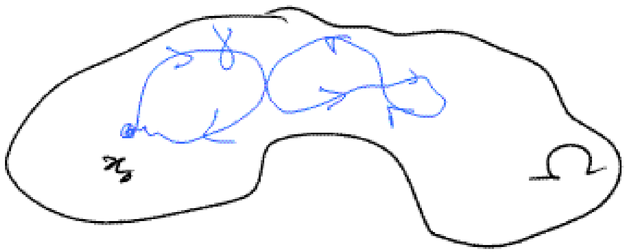
Si on pose $\gamma_s(t) = \phi(s,t)$ $\quad \gamma_s \in \mathcal{C}^0([0,1];\Omega)$ chemin dans Ω pour tout $s \in [0,1]$

$s \mapsto \gamma_s$ donne une déformation continue qui reste dans Ω de γ_0 à γ_1.

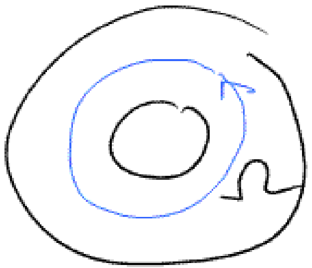


Définition : On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est simplement connexe si tout lacet dans Ω, un chemin $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1];\Omega)$ tq $\gamma(1)=\gamma(0)$, est homotope à un point i.e. un chemin γ_0 tq $\gamma_0(t) = z_0 \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$

L'intuition est qu'un ouvert simplement connexe est un ouvert qui n'a pas de trou



Ω simplement connexe



La couronne Ω n'est pas simplement connexe

Exemples : 1) Un ouvert convexe est simplement connexe.

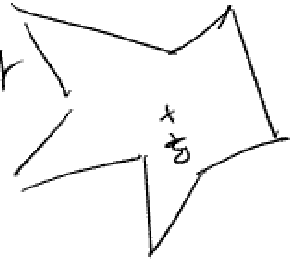
Ω ouvert convexe $\qquad x_0 \in \Omega$

$\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1];\Omega)$ lacet dans Ω.

$\phi(s,t) = (1-s)\,x_0 + s\,\gamma(t) \qquad s \in [0,1]$

$\phi(s,t) \in [x_0, \gamma(t)] \in \Omega$

2) Un ouvert étoilé est simplement connexe

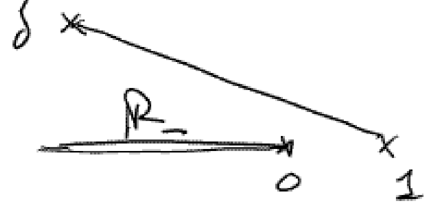


il existe $x_0 \in \Omega$ tq

$\forall x \in \Omega,\ [x_0, x] \subset \Omega$

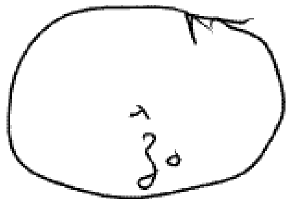
(même démonstration que 1))

Cas particulier $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est simplement connexe



$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,\ [1, z] \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

3) $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ n'est pas simplement connexe



γ n'est pas homotope à un point

4) La simple connexité est une notion topologique

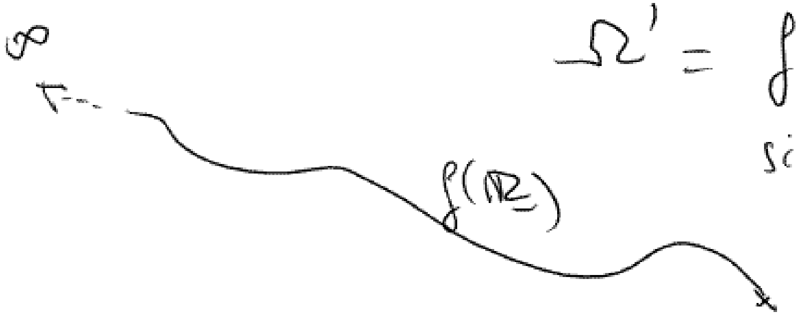
Si Ω' est homéomorphe à Ω

$f : \Omega \to \Omega'$ bijective, f, f^{-1} continues

et Ω est simplement connexe, alors Ω' l'est.

f homéomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$\Omega' = f(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{R}_-)$$ est simplement connexe



3.2 Intégrales de chemin

Définition : Ω ouvert de $\mathbb{C}$ $\quad f \in \mathcal{C}^0(\Omega ; \mathbb{C})$

1) Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ dans Ω, $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1] ; \Omega)$

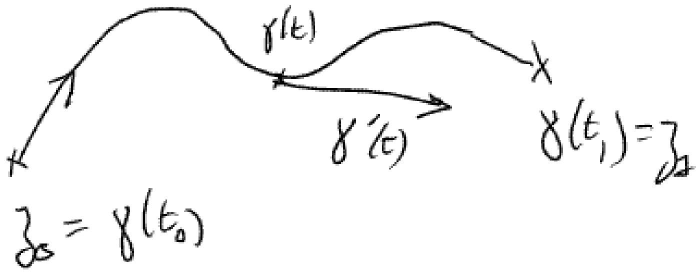
on note
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\gamma'(t)}_{\in \mathbb{C}} dt$$

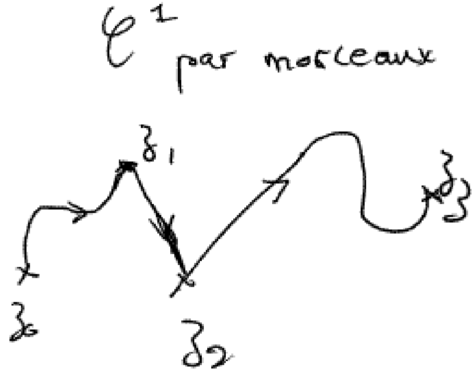
2) Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω,

$\gamma \in \mathcal{C}^0([t_0, t_N] ; \Omega)$ $\quad t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N$

$\gamma \in \mathcal{C}^1([t_i, t_{i+1}] ; \Omega)$ $\quad i \in \{0, \dots, N-1\}$

alors on note
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$





Proposition : Une intégrale de chemin $\int_\gamma f(z)\,dz$ ne dépend pas du paramétrage de γ mais il faut faire attention au sens de parcours.

Plus précisément si $\varphi : I \longrightarrow [t_0, t_1]$ est une application (un difféomorphisme) $\mathcal{C}^1$ $\quad I = \begin{cases} [s_0, s_1] & s_0 < s_1 \\ [s_1, s_0] & s_1 < s_0 \end{cases}$

$\varphi(s_0) = t_0 \quad \varphi(s_1) = t_1$

on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \begin{cases} \int_{\gamma\circ\varphi} f(z')\,dz' & \text{si } s_0 < s_1 \\ -\int_{\gamma\circ\varphi} f(z')\,dz' & \text{si } s_1 < s_0 \end{cases}$$

Preuve : $\gamma \circ \varphi : I \to \Omega$ est un chemin $\mathcal{C}^1$ avec

$$\gamma \circ \varphi(s_0) = \gamma(\varphi(s_0)) = \gamma(t_0) = z_0$$
$$\gamma \circ \varphi(s_1) = \gamma(\varphi(s_1)) = \gamma(t_1) = z_1$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$\underset{dt = \varphi'(s)ds}{\overset{t=\varphi(s)}{=}} \int_{s_0}^{s_1} f[\gamma(\varphi(s))]\,\underbrace{\gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)}_{(\gamma\circ\varphi)'(s)}\,ds$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} f[\gamma\circ\varphi]\,(\gamma\circ\varphi)'(s)\,ds$$

$$= \begin{cases} \int_{\gamma\circ\varphi} f(z')\,dz' & \text{si } s_0 < s_1 \\ -\int_{\gamma\circ\varphi} f(z')\,dz' & \text{si } s_1 < s_0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Proposition Soit γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω, $\gamma \in \mathcal{C}^0([t_0, t_N]; \Omega)$ $\gamma \in \mathcal{C}^1([t_i, t_{i+1}]; \Omega)$, et soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω telle que :

- $\gamma_n \in \mathcal{C}^0([t_0, t_N]; \Omega)$
- $\lim_{n \to \infty} \gamma_n(t_0) = \gamma(t_0)$
- $\lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t_N} \underbrace{|\gamma'(t) - \gamma_n'(t)|}_{\text{fonction continue par morceaux}} dt = 0$

alors
$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_n} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$
pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C})$

<u>Preuve</u> :

$$\gamma_n(t) = \gamma_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} \gamma_n'(s)\,ds$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t} \gamma'(s)\,ds$$

$$\left|\gamma(t) - \gamma_n(t)\right| \leq \left|\gamma(t_0) - \gamma_n(t_0)\right| + \int_{t_0}^{t} \left|\gamma'(s) - \gamma_n'(s)\right| ds$$

$$\forall t \in [t_0, t_N],\ \left|\gamma(t) - \gamma_n(t)\right| \leq \underbrace{\left|\gamma(t_0) - \gamma_n(t_0)\right|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_N} \left|\gamma'(s) - \gamma_n'(s)\right| ds}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

$\gamma([t_0, t_N]) = K$ est un compact de Ω.

Si n est assez grand $\gamma_n([t_0, t_N]) \subset K_{\varepsilon_0} = \{ z \in \Omega,\ d(z, K) \leq \varepsilon_0 \}$

$\subset \Omega$ pour ε assez petit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$$

Comme $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C})$ elle est uniformément continue sur le compact K_{ε_0}.

$$\sup_{\substack{z, z' \in K_{\varepsilon_0} \\ |z - z'| \leq \delta}} |f(z) - f(z')| = \omega(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

$$\sup_{t \in [t_0, t_N]} |f(\underbrace{\gamma(t)}_{= z}) - f(\underbrace{\gamma_n(t)}_{= z'})| \leq \omega\Big(\overbrace{\sup_{t \in [t_0, t_N]} |\gamma(t) - \gamma_n(t)|}^{\delta}\Big)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [t_0, t_N]} |f(\gamma(t)) - f(\gamma_n(t))| = 0$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz - \int_{\gamma_n} f(z)\, dz = \int_{t_0}^{t_N} f(\gamma(t))\, \gamma'(t) - f(\gamma_n(t))\, \gamma_n'(t)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_N} \left[f(\gamma(t)) - f(\gamma_n(t)) \right] \gamma'(t) \, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_N} f(\gamma_n(t)) \left[\gamma'(t) - \gamma_n'(t) \right] dt$$

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz - \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \right| \leq \int_{t_0}^{t_N} \left| f(\gamma(t)) - f(\gamma_n(t)) \right| \, |\gamma'(t)| \, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_N} \left| f(\gamma_n(t)) \right| \, \left| \gamma'(t) - \gamma_n'(t) \right| dt$$

$$\leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_N]} \left| f(\gamma(t)) - f(\gamma_n(t)) \right|}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \times \int_{t_0}^{t_N} \underbrace{|\gamma'(t)|}_{C^0 \text{ par morceaux}} \, dt$$

$$+ \sup_{z \in K_{\varepsilon_0}} |f(z)| \times \underbrace{\int_{t_0}^{t_N} \left| \gamma'(t) - \gamma_n'(t) \right| dt}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0}$$

Conclusion $\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$ $\boxed{=}$

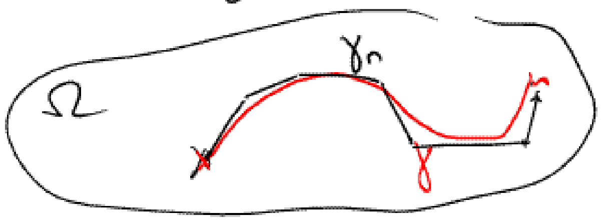
Exemple d'application : Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω, on peut l'approcher par une suite de chemin polygonaux dans Ω

γ' est une fonction continue par morceaux que l'on approche par une fonction γ_n' constante sur chaque intervalle d'une subdivision de $[t_0, t_N]$ de pas $\frac{t_N - t_0}{n}$

$\gamma_n(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t} \gamma_n'(s)\, ds$ chemin polygonal

$\gamma_n(t_0) = \gamma(t_0)$

$$\int_{t_0}^{t_N} |\gamma'(s) - \gamma_n'(s)|\, ds \to 0$$ convergence des sommes de Riemann.



Exemple d'intégrales de chemin :

- Cas d'un lacet (attention au sens de parcours).

$$f(z) = z^n \qquad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma(t) = e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{(e^{it})^n}_{f(\gamma(t))} \underbrace{i e^{it}}_{\gamma'(t)} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt$$

$$= \begin{cases} i \left[\dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} & n+1 \neq 0 \\ 2i\pi & \end{cases}$$

$$0 = \frac{e^{i(n+1)2\pi}}{i(n+1)} - \frac{e^{i(n+1)0}}{i(n+1)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$\int_\gamma z^n \, dz = 0 \quad \text{si } n \neq -1 \qquad\qquad \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

γ cercle unité orienté dans le sens trigonométrique

2) $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

$\gamma_{z_0} = [1, z_0]$ segment orienté de 1 à z_0

$$\gamma_{z_0}(t) = (1-t)\,1 + t\, z_0 \qquad t \in [0,1]$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-; \mathbb{C})$$

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(z)\, dz = \int_{\overrightarrow{[1, z_0]}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{(1-t)1 + t z_0}}_{f(\gamma(t))} \underbrace{(z_0 - 1)}_{\gamma'(t)} dt$$

On y reviendra dans l'étude du logarithme complexe.

<u>Arithmétique des chemins</u> : Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ dans Ω, on note $-\gamma$ le "même" chemin parcouru dans le sens inverse et on note $n\gamma$ le chemin γ parcouru n-fois $n \in \mathbb{N}$

le chemin $(-\gamma)$ parcouru $|n|$-fois si $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq 0. \end{cases}$

Avec un paramétrage $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$

$$(-\gamma)(t) = \gamma(t_0 + t_1 - t) : [t_0, t_1] \to \Omega$$

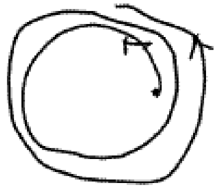
mais $(-\gamma)(t_0) = \gamma(t_1)$

$(-\gamma)(t_1) = \gamma(t_0)$

Exemples:

$\gamma_k(t) = e^{it}$ $\quad t \in [0, 2k\pi]$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$k \geq 0$



$\gamma_k = k\,\gamma_1$

γ_1 cercle parcouru une fois dans le sens trigo

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = k \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

$k < 0$

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = -|k| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Si $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ sont chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω on pose pour $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$

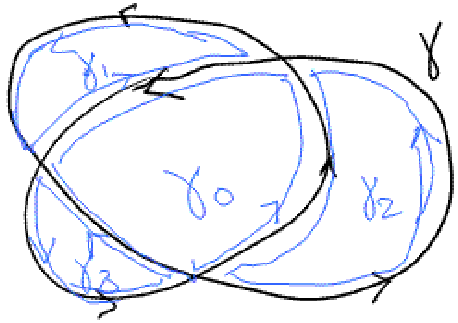
$$\int_{a_1\gamma_1 + \dots + a_N\gamma_N} f(z)\,dz = a_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + a_N \int_{\gamma_N} f(z)\,dz$$

Exemples.

- 

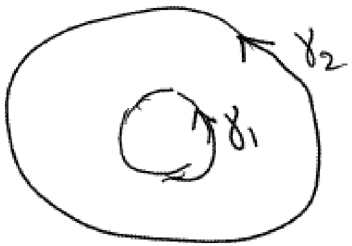
$\longrightarrow$


$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$

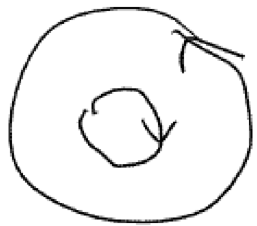


$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 2\gamma_0$$

$= 0$



$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$$



$\gamma =$