Note Title — Chap I : Rappels sur $\mathbb{C}$ et les séries — 16/01/2019

I) L'ensemble $\mathbb{C}$

Définition : $\mathbb{C} = \{ x+iy,\ x,y \in \mathbb{R} \}$ est muni d'une addition et d'une multiplication données par

$$(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$$

$$(x+iy) \times (x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

Avec ces opérations $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif qui contient $\mathbb{R}$: $a \in \mathbb{R}$ est identifié à $a+i0$.

On définit aussi le conjugué d'un complexe par

$$\overline{x+iy} = x - iy$$

et son module par $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$|x+iy|^2 = x^2+y^2 = \overline{(x+iy)} \times (x+iy)$$

L'inverse de $x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est donné par

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{\overline{x+iy}}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

On peut construire $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$ d'au moins trois façons :

1) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}$ muni des opérations

$$(x,y) + (x',y') = (x+x',\ y+y') \quad \text{addition usuelle dans } \mathbb{R}^2$$

et

$$(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy',\ xy' + x'y)$$

Ensuite on vérifie que l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ a \mapsto (a,0) \end{array}$

est un morphisme pour $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, injectif. On identifie $(a,0) \in \mathbb{C}$ avec le réel $a \in \mathbb{R}$.

On pose ensuite $i = (0,1)$

$$(0,1) \times (0,1) = (0-1,\ 0+0) = (-1,0) = -1$$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + iy.$$

2) $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \right\}$ muni de l'addition et
$x, y \in \mathbb{R}$ de la multiplication usuelles dans $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & -(y+y') \\ y+y' & x+x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + yx') \\ yx' + xy' & -yy' + xx' \end{pmatrix}$$

$$1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X] / (X^2+1)$

(X^2+1) est l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme X^2+1.

$$(X^2+1) = \{ P \times (X^2+1), \ P \in \mathbb{R}[X] \}.$$

(X^2+1) est un idéal maximal et $\mathbb{C}$ est un corps.

$$1 = \dot{1} \qquad i = \dot{X} \qquad \dot{X} \times \dot{X} = \dot{X^2} = \dot{-1}$$

$$\dot{1} \times \dot{P} = \dot{\overline{1 \times P}} = \dot{P}$$

Rq : • $\mathbb{C}$ en tant que corps est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

- C'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

• Plus généralement si E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension d, c'est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $2 \times d$.

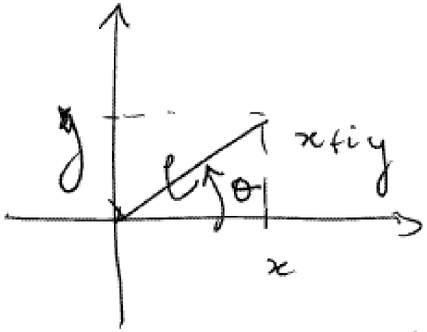
$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \times \dim_{\mathbb{C}} E.$$

• $(\mathbb{C}, |\ |)$ s'identifie au plan euclidien sur $\mathbb{R}$ avec la norme $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

et le produit scalaire associé : $|x+iy|^2 = x^2+y^2$

$$\langle (x+iy), (x'+iy') \rangle = xx' + yy' = \mathrm{Re}\left[\overline{(x+iy)}\,(x'+iy')\right]$$

L'écriture en polaire correspond à



$$z = x+iy = \rho\, e^{i\theta} = \left[(\rho\cos\theta)+i(\rho\sin\theta)\right]$$

avec $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \theta \in \mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{C}$
$a \neq 0$

$z \to az+b$ est une similitude directe dans le plan $\mathbb{R}^2$

$$a = \rho\, e^{i\theta}$$

$$z \xmapsto[\substack{\text{rotation}\\ \text{centre O}\\ \text{angle } \theta}]{} e^{i\theta} z = z_1 \xmapsto[\substack{\text{homothétie}\\ \text{centre O}\\ \text{rapport } \rho}]{} z_2 = \rho z_1 \xmapsto[\text{translation}]{} z_3 = z_2 + b$$

Lien avec l'écriture matricielle $a = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$$a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |a| \end{pmatrix}}_{\text{homothétie vectorielle}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation vectorielle d'angle } \theta}$$

- Comme $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, muni de la norme $|\,|$
  $\mathbb{C}$ est complet.

Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie
muni d'une norme sur $\mathbb{C}$: $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u \in E, \ \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$ module

$\forall u, v \in E, \ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

est complet

II) Séries, séries de fonctions

2.1 : Séries absolument convergentes dans un Banach

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ sur $\mathbb{K}$ qui est complet.

Def : Soit une $\mathbb{K}$-algèbre $(\underbrace{\mathcal{A}, +, \cdot\lambda}_{\text{esp vect}}, \circ)$ mult interne avec unité $1_{\mathcal{A}}$.

On dit qu'une norme sur $\mathcal{A}$ est une norme d'algèbre si :

- $\| 1_{\mathcal{A}} \| = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad \|A \circ B\| \leq \|A\| \, \|B\|$

On dit que $(\mathcal{A}, +, \cdot\lambda, \circ, \| \ \|)$ est une algèbre de Banach, si $\| \ \|$ est une norme d'algèbre et si $(\mathcal{A}, \| \ \|)$ est complet.

<u>Exemples</u> : 1) Tous les $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont des espaces de Banach (pour n'importe quelle norme puisque toutes les normes sont équivalentes).

2) X ensemble, E $\mathbb{K}$-ev de <u>dimension finie</u>

$$\mathcal{F}_b(X, E) = \{ f : X \to E, \ \exists C_f > 0, \ \forall x \in X, \ \|f(x)\|_E \leq C_f \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$$

$(\mathcal{F}_b(X, E), \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach.

3) (X,d) espace métrique, E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

$$\mathcal{C}^0_b(X;E) = \mathcal{C}^0(X;E) \cap \mathcal{F}_b(X;E)$$
$$= \{ f \in \mathcal{C}^0(X;E),\ \exists C_f > 0,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\|_E \leq C_f \}$$

$\mathcal{C}^0_b(X;E)$ est un fermé de $\mathcal{F}_b(X;E)$ car une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Donc $\left(\mathcal{C}^0_b(X;E), \|\ \|_\infty\right)$ est un Banach.

Cas particulier si (X,d) est compact alors
$$\mathcal{C}^0_b(X;E) = \mathcal{C}^0(X,E)$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E = \max_{x \in X} \|f(x)\|_E$$

(X,d) compact $\Rightarrow$ $(\mathcal{C}^0(X,E), \| \|_\infty)$ Banach)

4) Autre cas particulier : $E = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathcal{F}_b(X;\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^0_b(X;\mathbb{K})$ munis de $\| \|_\infty$ sont des Banach.

Muni des opérations :

- $\forall x \in X$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ déf de $f+g$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$, $(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$ déf de λf
- $\forall x \in X$, $(f \times g)(x) = \underbrace{f(x) \times g(x)}_{\text{dans } \mathbb{K}}$ déf de $f \times g$

$(\mathcal{F}_b(X;\mathbb{K}), +, .\lambda, \times, \| \|_\infty)$ est une algèbre de Banach

Si (X,d) est un espace métrique
$\left(\mathcal{C}^0_b(X;\mathbb{K}), +, \cdot\lambda, \times, \| \|_\infty\right)$ alg. de Banach

$$\sup_{x\in X} |(f\times g)(x)| = \sup_{x\in X} |f(x)| \times |g(x)| \leq \left[\sup_{x\in X} |f(x)|\right] \times \left[\sup_{x'\in X} |g(x')|\right]$$

$$\|f\times g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

5) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni des opérateurs $(+, \cdot\lambda, \circ)$
mult des matrices
est une algèbre. Comme $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2 c'est un espace de Banach pour n'importe quelle norme.

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$$

$$\|A\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right]$$

sont des normes

$$\|A\|_1 = \underset{1 \leq j \leq n}{\mathrm{Max}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right]$$

d'algèbres.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \| \|_\infty)$ ou $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \| \|_1)$ sont des algèbres de Banach.

6) E $\mathbb{K}$-ev de Banach. muni de la norme $\| \|_E$

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E

$L : E \to E$ est continue ssi

$$\exists C_L > 0, \ \forall x \in E, \quad \|L(x)\|_E \leq C_L \|x\|_E$$

$$\| L \|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\| L(x) \|_E}{\| x \|_E} \qquad (*)$$

En particulier on a toujours : $(**)$ $\| L(x) \|_E \leq \| L \|_{\mathcal{L}(E)} \| x \|_E$

- $\| Id_E \|_{\mathcal{L}(E)} = 1 \qquad (*)$
- avec $(**)$ $\qquad \| L_2 \circ L_1 \|_{\mathcal{L}(E)} \leq \| L_2 \|_{\mathcal{L}(E)} \| L_1 \|_{\mathcal{L}(E)}$

$\left(\mathcal{L}(E), +, \cdot\lambda, \circ, \| \, \|_{\mathcal{L}(E)} \right)$ est une algèbre de Banach.

7) Si $(\mathcal{A}, +, \cdot\lambda, \circ, \| \, \|)$ est une algèbre de Banach et X est un ensemble (resp (X, d) esp métrique)

alors $\mathcal{F}_b(X;\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}_b^0(X;\mathbb{R})$) sont des algèbres de Banach.

<u>Définition</u> : Soit $(E, \| \|_E)$ un $\mathbb{K}$-ev.

- On appelle série de terme u_n, $n \in \mathbb{N}$, la donnée des deux suites : $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite des termes} \\ \left(S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}} \text{ suite des sommes partielles.} \end{cases}$

- On dit que la série converge si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans E

- On dit que la série converge absolument si
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E < +\infty$$
(ie si la série ≥ 0 de terme $\|u_n\|_E$ cv)

Proposition : $(E, \| \|_E)$ est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente converge.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(E, \| \|_E)$ de Banach et soit $\sum u_n$ une série absolument convergente
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_E < +\infty.$$
Il s'agit de montrer que $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ a une

limite dans E quand $N \to +\infty$.

On prend $N \geq m+1$ et on écrit :

$$\left\| S_N - S_m \right\|_E = \left\| \sum_{n=m+1}^{N} u_n \right\|_E \leq \sum_{n=m+1}^{N} \| u_n \|_E \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} \| u_n \|_E$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \| u_n \|_E < +\infty$ série positive convergente

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq

$$m \geq m_\varepsilon, \quad \sum_{n=m+1}^{+\infty} \| u_n \|_E \leq \sum_{n=m_\varepsilon+1}^{+\infty} \| u_n \|_E \leq \varepsilon$$

$\forall N \geq m+1 \geq m_\varepsilon + 1$, $\| S_N - S_m \|_E \leq \varepsilon$

vrai aussi si $N = m$ et on peut échanger N et m

$$\forall N, m \geq m_\varepsilon + 1, \quad \| S_N - S_m \|_E \leq \varepsilon$$

La suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ Banach

Elle converge dans E.

$\Leftarrow$ Supposons que dans l'evn $(E, \| \|_E)$ toute série absolument convergente, converge.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

Il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tq

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \|_E \leq \frac{1}{2^k}$$

On pose $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u_k \|_E \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 < +\infty$$

La série $\sum u_k$ est absolument convergente

$$\sum_{k=0}^{K} u_k = (\cancel{x_{n_{k_1}}} - x_{n_{k_0}}) + (\cancel{x_{n_{k_2}}} - \cancel{x_{n_{k_1}}}) + \cdots + (x_{n_{K+1}} - \cancel{x_{n_K}})$$

$$= x_{n_{k+1}} - x_{n_{k_0}} \xrightarrow{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ dans } E$$

La sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy avec une sous-suite convergente, elle converge $\blacksquare$

<u>Rappel</u> : Condition nécessaire pour la convergence d'une série

$$\left(\sum u_n \text{ cv dans } E\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right)$$

$$\boxed{\overset{\Longleftarrow}{\text{fausse}}}$$

$u_n = \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$

<u>Opérations sur les séries</u>

1) <u>Combinaison linéaire</u> : La combinaison linéaire de $\sum v_n$

et $\sum v_n$ de coefficients α et β est la série de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$.

Avec $\| \alpha u_n + \beta v_n \|_E \leq |\alpha| \, \|u_n\|_E + |\beta| \, \|v_n\|_E$

une combinaison linéaire de série absolument convergente est absolument convergente avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

2) Série produit dans une algèbre de Banach $(\mathcal{A}, +, \cdot\lambda, \circ, \| \|_{\mathcal{A}})$.

La série produit $\left(\sum u_n\right) \circ \left(\sum v_n\right)$ est la série

la série de terme général

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \circ v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} \circ v_k$$
$$= \sum_{k_1+k_2=n} u_{k_1} \circ v_{k_2}$$

Avec

$$\|w_n\|_{\mathcal{A}} = \Big\| \sum_{k=0}^{n} u_k \circ v_{n-k} \Big\|_{\mathcal{A}} \overset{\text{norme d'algèbre}}{\leq} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|_{\mathcal{A}} \|v_{n-k}\|_{\mathcal{A}}}_{\text{terme de } \left(\sum \|u_n\|_{\mathcal{A}}\right)\left(\sum \|v_n\|_{\mathcal{A}}\right)}$$

et le résultat sur les séries produits de séries ≥ 0 on obtient que la série produit de deux séries absolument (AC) convergente est absolument convergente.

Dans ce cas on a de plus :

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \circ v_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2 \leq n} u_{k_1} \circ v_{k_2} \right)$$

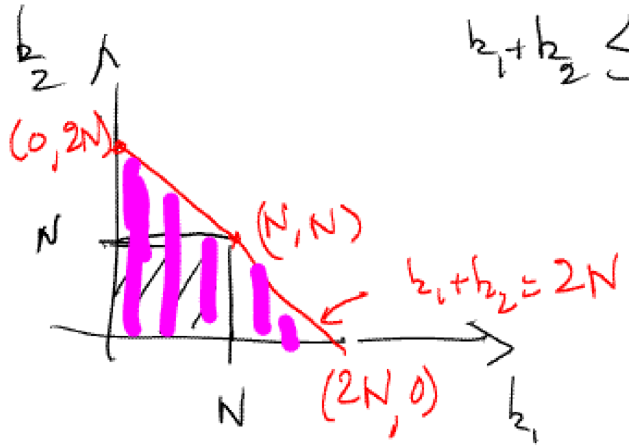
$$= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} u_{k_1} \right) \circ \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} v_{k_2} \right)$$

<u>Démonstration de (*)</u> : Pour $N \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k_1=0}^{N} u_{k_1}\right) \circ \left(\sum_{k_2=0}^{N} v_{k_2}\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k_1+k_2=n} u_{k_1} \circ v_{k_2}\right)$$

$$- \sum_{\substack{k_1 \leq N \\ k_2 \leq N}} u_{k_1} \circ v_{k_2}$$

$$= \sum_{k_1+k_2 \leq 2N} u_{k_1} \circ v_{k_2} - \sum_{\substack{k_1 \leq N \\ k_2 \leq N}} u_{k_1} \circ v_{k_2}$$



▨ $k_1 \leq N$ et $k_2 \leq N$

▥ $k_1+k_2 \leq 2N$

$$= \sum_{\substack{N < k_1,\ N < k_2 \\ k_1 + k_2 \leq 2N}} u_{k_1} \circ v_{k_2}$$

$$\left\| \sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k_1=0}^{N} u_{k_1}\right) \circ \left(\sum_{k_2=0}^{N} v_{k_2}\right) \right\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{\substack{N < k_1,\ N < k_2 \\ k_1 + k_2 \leq 2N}} \|u_{k_1}\|_{\mathcal{A}} \|v_{k_2}\|_{\mathcal{A}}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k_1 + k_2 \leq 2N} \|u_{k_1}\|_{\mathcal{A}} \|v_{k_2}\|_{\mathcal{A}} - \sum_{\substack{k_1 \leq N \\ k_2 \leq N}} \|u_{k_1}\|_{\mathcal{A}} \|v_{k_2}\|_{\mathcal{A}}}_{\xrightarrow{N \to \infty} 0}$$

Car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|_{\mathcal{A}} \|v_{n-k}\|_{\mathcal{A}}\right) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \|u_{k_1}\|_{\mathcal{A}}\right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \|v_{k_2}\|_{\mathcal{A}}\right)$

On a montré $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{2N} w_n = \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{k_1=0}^{N} u_{k_1}\right) \circ \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{k_2=0}^{N} v_{k_2}\right)$ $\blacksquare$

En résumé pour étudier l'absolue convergence de $\sum u_n$ dans un espace ou une algèbre de Banach il suffit de savoir étudier la série positive de terme $\|u_n\|_E$.

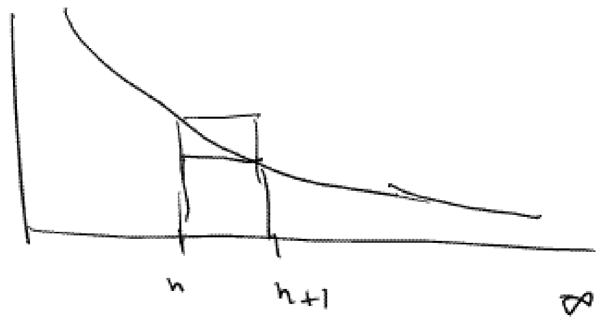
<u>Rappels des différentes méthodes !</u>

1) Série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} < +\infty$

Ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

2) Comparaison si $0 \leq a_n = O(b_n)$ avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$
alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ $\left(a_n \underset{n \to \infty}{\sim} b_n \Rightarrow \begin{cases} a_n = O(b_n) \\ b_n = O(a_n) \end{cases} \right)$

3) Comparaison série et intégrale : $a_n = f(n)$
avec $\underline{f \geq 0}$ et $\underline{\text{décroissante}}$
$\underline{f \text{ continue}}$ sur $[0, +\infty[$.



$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

La serie cv ssi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ cv

4) Critère de d'Alembert : Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}_+$

alors $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

$L > 1 \Rightarrow$ (a_n ne tend pas vers 0)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ diverge

5) Critère de Cauchy : Si $\limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = L$

alors : $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

$L > 1 \Rightarrow (a_n$ ne tend pas vers $0)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

On applique ces choses là avec $a_n = \|u_n\|$ et cela donne l'absolue convergence dans les cas (où ça marche)

Cas particulier d'algèbre de Banach : $\mathcal{C}_b^0(X; \mathbb{C})$ (X,d) métrique

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

2.2 Séries de fonctions

Définition : On dit que la série de fonctions de terme

$$f_n \,, \quad f_n : \begin{array}{l} X \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f_n(x) \end{array} \in \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{C})$$

converge normalement si elle converge absolument dans $\left(\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{C}), \| \|_\infty\right)$

$$\left(\text{Convergence normale } \sum f_n\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Convergence absolue de } \sum f_n \\ \text{dans } \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{C}), \| \|_\infty\end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Convergence simple} \\ \text{de } \sum f_n(x) \text{ dans } \mathbb{C}\end{array}\right) \Longleftarrow \left(\begin{array}{c}\text{Convergence absolue de } \sum f_n(x) \\ \text{dans } (\mathbb{C}, | |) \text{ pour tout } x \in X\end{array}\right)$$

Proposition (Cv uniforme et intégration) Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n(x)\, dx = \int_K f(x)\, dx$$

$dx = dx_1\, dx_2 \dots dx_d$ (mesure de Lebesgue.

Preuve

$$\| f_n - f \|_\infty = \max_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\left| \int_K [f_n(x) - f(x)]\, dx \right| \leq \int_K |f_n(x) - f(x)|\, dx$$
$$\leq \left(\int_K 1\, dx\right) \times \| f_n - f \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

$$\int_K 1\,dx \leq (2R)^d \quad \text{si} \quad K \subset [-R,R]^d$$

III] Séries entières

Définition : On appelle série entière de coefficient a_n, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$.

$z^0 = 1$

On la note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sachant que cette série converge quand on prend $z = 0$

Proposition : Si $R = \dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty]$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$, alors on a :

$$|z| < R \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right)$$

$$|z| > R \Rightarrow \left(a_n z^n \text{ ne tend pas vers } 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ diverge} \right)$$

<u>Preuve</u> : On applique le critère de Cauchy pour les séries.

On peut supposer $z \neq 0$.

$$\limsup_{n \to \infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \times |z| \begin{cases} < 1 & \text{si } |z| < R \\ > 1 & \text{si } |z| > R \end{cases}$$

$\boxtimes$

Définition : $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Définition :

- La série entière dérivée de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

- Une série entière primitive de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série de la forme $C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1} = C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$

Proposition : Les séries entières dérivées et primitives de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, i.e. $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Lemme : Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites positives tq $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \ell \in]0, +\infty[$ alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \beta_n = \ell \times \limsup_{n\to\infty} \beta_n \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$$

$\limsup_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \beta_k\right)$ est aussi la plus grande valeur d'adhérence de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Preuve : 1) $\ell \times \limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n \beta_n)$

Il existe une sous-suite $(\beta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tq $\lim_{k\to\infty} \beta_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} \beta_n$.

Alors : $\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \ell \\ \lim_{k\to\infty} \beta_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} \beta_n \end{array}\right\} \underset{\text{pas de FI}}{\overset{0<\ell<+\infty}{\Longrightarrow}} \lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} \beta_{n_k} = \ell \times \left(\limsup_{n\to\infty} \beta_n\right)$

$\ell \times \limsup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ est une valeur d'adhérence de $(\alpha_n \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Donc : $\ell \times \left(\limsup_{n\to\infty} \beta_n\right) \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n \beta_n)$

2) $\limsup_{n\to\infty} (\alpha_n \beta_n) \overset{?}{\leq} \ell \times \limsup_{n\to\infty} \beta_n$.

Comme $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \ell \in]0,+\infty[$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\ell} \in]0,+\infty[$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}(\alpha_n \beta_n) \quad \text{pour } n \geq N \text{ tq } \alpha_n \neq 0$$

Le 1) nous dit alors:

$$\frac{1}{\ell} \times \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n \beta_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n}\alpha_n \beta_n\right) = \limsup_{n\to\infty} \beta_n \quad \blacksquare$$

<u>Preuve de la proposition:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$

La série dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$

$$= \begin{cases} a_1 & \text{si } z = 0 \\ \dfrac{1}{z} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^{n+1} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

Pour $z \neq 0$ on regarde $= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$

$$\limsup_{n\to\infty} |n a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} |z| \times |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Or $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \times |z| = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} \times |z| = e^0 \times |z| = |z| \neq 0$

et $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$ dans $[0,+\infty]$

On obtient $\limsup_{n\to\infty} |n a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|}{R}$

La série dérivée converge si $|z| < R$

diverge si $|z| > R$

Par définition du rayon de convergence, le rayon de rayon de convergence de la série dérivée est égal à R, celui de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

2) Si $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est une série primitive de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la série dérivée de $\left(C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \right)$. Par 1) elles ont même rayon de convergence $\blacksquare$

<u>Proposition</u> : Le rayon de convergence de la série $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$

<u>Preuve</u> : On utilise le critère de d'Alembert (commode avec $n!$)

Le terme général de la série est $u_n = \frac{z^n}{n!}$

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0 < 1$ la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

le rayon de cv est $+\infty$

Application du critère de d'Alembert pour $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_n z^n$

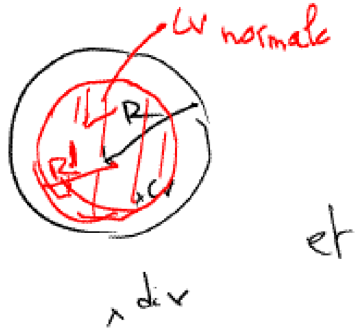
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times |z|$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0,+\infty]$ alors la série cv

dès que $\ell \times |z| < 1$ et diverge

si $\ell \times |z| > 1$. Le rayon de cv es $\frac{1}{\ell}$.

Proposition : Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$, supposé >0,
définit une fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dans $D(0,R)$
disque ouvert



$f \in \mathcal{C}^0(D(0,R);\mathbb{C})$

et pour tout $R' < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement vers f dans $\overline{D(0,R')}$.

Preuve : Il suffit de vérifier la convergence normale sur $\overline{D(0,R')} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R' \}$

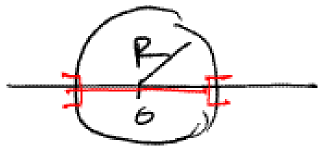
Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $\left(\| a_n z^n \|_{\mathcal{C}^0(\overline{D(0,R')};\,\mathbb{C})} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sup_{|z| \leq R'} |a_n z^n| \right)^{\frac{1}{n}} \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \times R'$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\| a_n z^n \|_{\mathcal{C}^0(\overline{D(0,R')}; \mathbb{C})} \right)^{\frac{1}{n}} \leq R' \times \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{R'}{R} < 1$$

Par le critère de Cauchy dans $\left(\mathcal{C}^0(\overline{D(0,R')}; \mathbb{C}), \| \, \|_{\mathcal{C}^0} \right)$ on en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(\overline{D(0,R')}; \mathbb{C})$. En particulier f est continue dans $\overline{D(0,R')}$. Comme c'est vrai pour tout $R' < R$ f est continue de $D(0,R)$ dans $\mathbb{C}$ $\blacksquare$

<u>Proposition</u>: Pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $R = \frac{1}{\limsup_{n} |a_n|^{\frac{1}{n}}} > 0$

on peut considérer la fonction définie sur



$]-R,R[\subset \mathbb{R}$ par $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R,R[; \mathbb{C})$ et on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n! \, a_n$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \text{pour } z \in D(0,R)$$

Preuve : 1) On considère la série dérivée $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

qui a pour rayon de converge $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

$g \in \mathcal{C}^0(D(0,R) ; \mathbb{C})$

et donc $g \in \mathcal{C}^0(]-R,R[; \mathbb{C})$

De plus pour $R' < R$ la convergence

$$\sum_{n=0}^{N} n a_n t^{n-1} \xrightarrow{N\to\infty} g(t) \quad \text{est uniforme sur } [-R', R']$$

Pour $x \in [-R', R']$ on pose :

$$G(x) = a_0 + \int_0^x g(t)\, dt$$

$$= a_0 + \int_0^x \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} n a_n t^{n-1} \right) dt$$

$$\overset{\text{cv uniforme}}{=} a_0 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^x n a_n t^{n-1}\, dt$$

$$= a_0 + \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right) = f(x)$$

G est $\mathcal{C}^1$ sur $[-R', R']$ comme primitive de $g \in \mathcal{C}^0([-R', R'], \mathbb{C})$

Comme $f = G$, $f \in \mathcal{C}^1([-R', R']; \mathbb{C})$

Comme c'est vrai pour tout $R' < R$, $f \in \mathcal{C}^1(]-R, R[; \mathbb{C})$

De plus on a montré $f'(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

2) Par récurrence on établit que $f \in \mathcal{C}^{(p+1)}(]-R, R[; \mathbb{C})$

et que $f^{(p+1)}(x) = \left[f^{(p)}(x)\right]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n\, x^{n-p}\right)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)\, a_n x^{n-p-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-(p+1)+1)}_{=0 \text{ si } n \leq p}\, a_n \underbrace{x^{n-(p+1)}}_{\substack{=0 \\ \text{si } x=0 \quad n > p+1}}$$

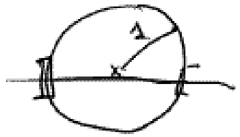
En particulier on a :

$$f^{(p+1)}(0) = (p+1)\, p \times \cdots \times 2 \times 1 \times a_{p+1}$$

$$= (p+1)!\ a_{p+1}$$

$\square$

Exemple : $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ avec rayon de cv $R=1$



$$\ln(1-z) = -\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1}\right]$$ définit une fonction continue sur $D(0,1)$

et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$

avec $\left[\ln(1-x)\right]' = -\dfrac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1,1[$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k} x^k$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\ln(1-x)\right](0) = \frac{(-1)}{k} \times k! = -(k-1)!$$

pour $k \geq 1$.

Propriétés de l'exponentielle :

1) $z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

2) Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :

$$\exp(z_1) \times \exp(z_2) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\right) \times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{k_2}}{k_2!}\right)$$

$$\overset{\text{série produit}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k_1+k_2=n} \frac{z_1^{k_1} \, z_2^{k_2}}{k_1! \, k_2!} \times n!\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z_1^{k} z_2^{n-k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1+z_2)^n = \exp(z_1+z_2)$$

3) Sur $\mathbb{R}$ on a : $\displaystyle (\exp x)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \times \frac{1}{n!} x^{n-1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \exp x$$

exp est l'unique solution de $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

4) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{z}) = \overline{(\exp z)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \overline{\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)} = \overline{\exp(z)}$$

A partir de là on a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$|\exp(it)|^2 = \exp(it) \times \overline{\exp(it)} = \exp(it) \times \exp(-it)$$
$$= \exp(it - it) = \exp(0) = 1$$

On peut écrire $\exp(it) = C(t) + i\, S(t)$

$C, S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$C^2(t) + S^2(t) = |\exp(it)|^2 = 1$$

On peut définir à partir de $\exp(z) = e^z$

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{cases}$$

rayon de cv $+\infty$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{ch}\, z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ \mathrm{sh}\, z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{array}\right.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $C(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos(t)$

$S(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin(t)$

$e^{it} = 1 + it + o(t)$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{it}-e^{i0}}{t-0} = i$

$e^{i(t_0+h)} = e^{it_0} \times e^{ih}$

on en déduit $\dfrac{d}{dt}(e^{it}) = i e^{it}$

$\dfrac{d\cos t}{dt} + i\dfrac{d\sin t}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos t + i\sin t) = i(\cos t + i\sin t) = -\sin t + i\cos t$

$\cos' t = -\sin t$ $\qquad$ $\sin 0 = 0$ $\qquad$ $\sin t \underset{t \to 0}{\sim} t$

$\sin' t = \cos t$ $\qquad$ $\cos 0 = 1 > 0$

Il existe $T_1 > 0$ tq $\cos T_1 < 0$.

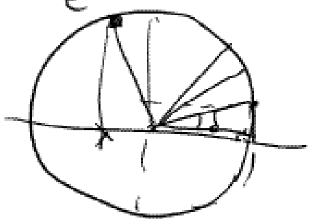
Au voisinage de 0 $\qquad$ $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ $\quad < 1$ si $t > 0$

$\sin t = t + o(t)$

Il existe δ tq $\cos(\delta) < 1$ et $\sin(\delta) > 0$

$e^{in\delta}$ et en prenant $e^{i\delta n}$ avec n bien choisi

$\delta > 0$ petit



$\cos(n\delta) < 0$

$\cos(0)$ $\qquad$ $\cos(T_1) < 0$

Par le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $T \in]0, T_1[$ tq $\cos T = 0$

On note $T_0 = \inf \{ T \in]0, +\infty[, \cos T = 0 \}$

t	0		T_0
$\sin' t = \cos t$	1	$+$	0
$-\cos' t = \sin t$	0	$+$ $\nearrow$	$+1$
$\cos t$	1	$\searrow$	0

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$e^{iT_0} = \cos T_0 + i \sin T_0$

$= 0 + i \times 1 = i$

$e^{i2T_0} = (e^{iT_0})^2 = i^2 = -1$

$e^{i4T_0} = i^4 = 1$

$4T_0 = 2\pi$

On note $T_0 = \frac{\pi}{2}$

$$e^{2i\pi} = 1 \qquad e^{i(t+2\pi)} = e^{it} \times e^{i2\pi} = e^{it}$$

$\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont périodiques de période 2π

$$\gamma(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

$$\gamma'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) \qquad |\gamma'(t)| = 1$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt}_{\text{distance parcourue entre l'instant 0 et } 2\pi} = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \underbrace{2\pi}_{\text{C'est bien la circonférence du cercle}}$$

Rq : La série de l'exponentielle sert aussi à définir

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

quand A appartient une algèbre de Banach.