Bartók et le nombre d'or

Guillaume Laplante-Anfossi
Étudiant en Mathématiques & Physique, Université de Montréal
Bachelier en violon, Conservatoire de Musique de Montréal

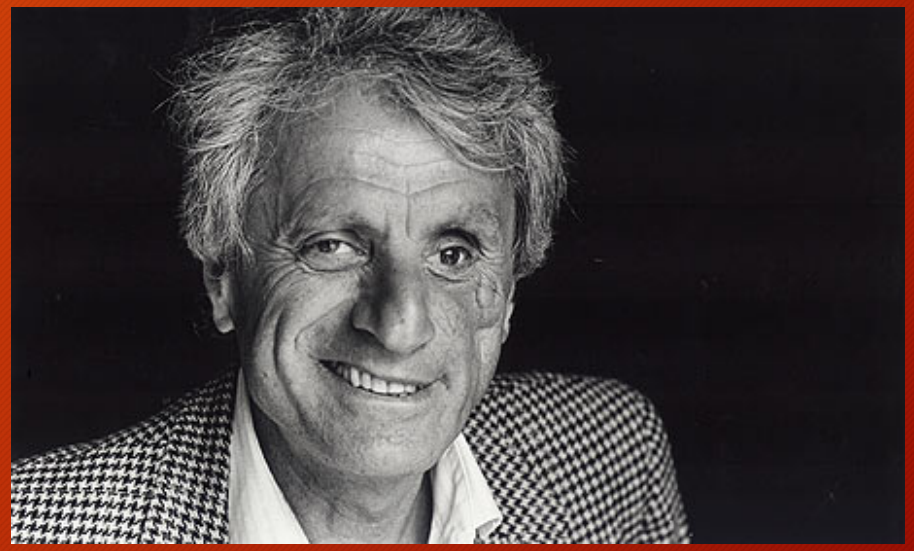
Club mathématique de l'Université de Montréal, 17 janvier 2018

« *La musique est un exercice d'arithmétique secrète où l'esprit ne réalise pas qu'il compte.* »

-Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Iannis Xénakis (1922-2001)

- Compositeur grec, qui a vécu en France
- Architecte auprès de Le Corbusier
- Souhaite formaliser la composition musicale: élabore une « axiomatique musicale »
- *Musiques formelles* (1963)
- Utilise des lois de probabilités pour créer de la musique « aléatoire »



[1] Iannis Xénakis, *Musiques formelles*, Éditions Richard-Masse, 1963

À paraître…

Iannis Xénakis: Musique aléatoire et mathématiques

Guillaume Laplante-Anfossi, Université de Montréal
Sous la supervision de
Accepté le 10 octobre 2017

Résumé

Iannis Xénakis (1922-2001) est sans doute l'un des compositeurs les plus importants du XXe siècle. Architecte et ingénieur de formation, il entrevoit à travers l'essor de la théorie des probabilités de grandes possibilités créatrices. Son projet est ambitieux : à la manière de Hilbert qui souhaitait au début du siècle axiomatiser la physique, Xénakis cherche à formaliser la composition musicale. Dans son livre *Musique formelles* [Xé63], il articule une démarche de création basée sur les mathématiques, manipulant des «grains de sons» à l'aide de lois de probabilités. Nous nous proposons ici d'introduire le personnage et sa démarche à travers la construction de l'une de ses premières oeuvres de «musique stochastique», *Achorripsis* [Xé58][Tam09]. Notre présentation sera axée sur le processus concret de composition, sur le *comment* des mathématiques en musique, dans le but de donner une nouvelle dimension à l'écoute des oeuvres du compositeur.

Nous débutons par un bref portrait biographique du compositeur. Après un rappel de quelques notions d'acoustique musicale et de probabilités, nous définissons sa démarche par

David Hilbert (1862-1943)

- On ne peut pas seulement se fier à l'intuition, il faut fonder les mathématiques sur des bases rigoureuses -*axiomatiques*
- *Grundlagen der Geometrie* (1899)
- 23 problèmes (1900)
- Le programme de Hilbert: « Nous devons savoir, nous saurons » (1930)

Béla Bartók (1881-1945)

- Pianiste et compositeur hongrois
- Étude extensive du folklore de son pays (ethnomusicologie)
- Plus d'une centaine d'œuvres (piano, musique de chambre, orchestre)
- Musique « organique » et « polymodale »
- Trouve son inspiration dans la Nature

Conférences de Harvard (1943)

« Du reste, l'élaboration […] est survenue de manière subconsciente et instinctive elle aussi. Je n'ai jamais créé de théories à l'avance. Je détestais les idées de la sorte.

[…] Cette attitude ne signifie pas que je composais… sans plans définis et sans contrôle suffisant. […]

Lorsque je m'apprêtais à écrire une pièce, je ne me suis jamais préoccupé de théories générales que j'aurais dû lui appliquer. »

-

[2] Béla Bartók, *Écrits*, Éditions Contrechamps, 2006

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

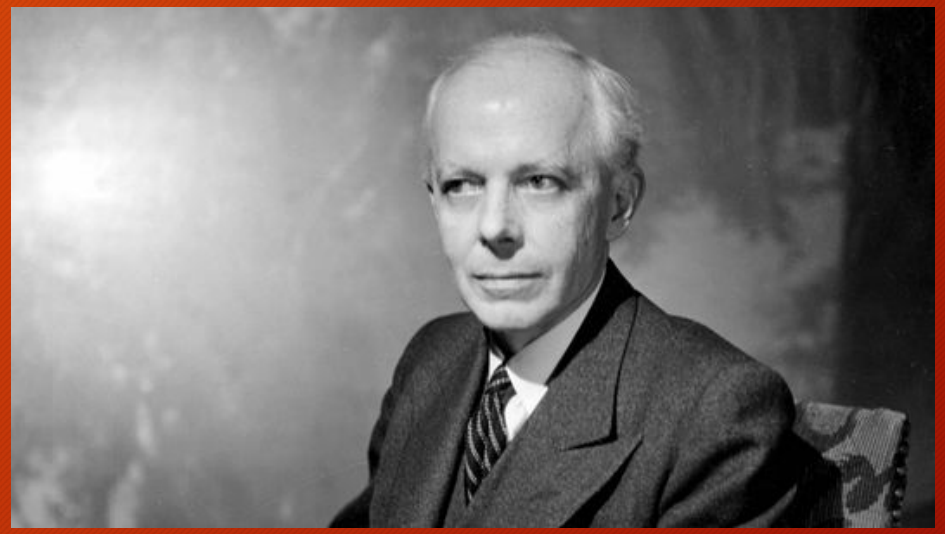
- Élabore une philosophie des mathématique fondée sur l'intuition
- Refuse le raisonnement par l'absurde et le principe du tiers exclu (on parlera de *logique intuitionniste*)
- Henri Poincaré (1854-1912) défendra également une forme d'intuitionnisme

Une première écoute…

Musique pour cordes, percussions et célesta (1936)

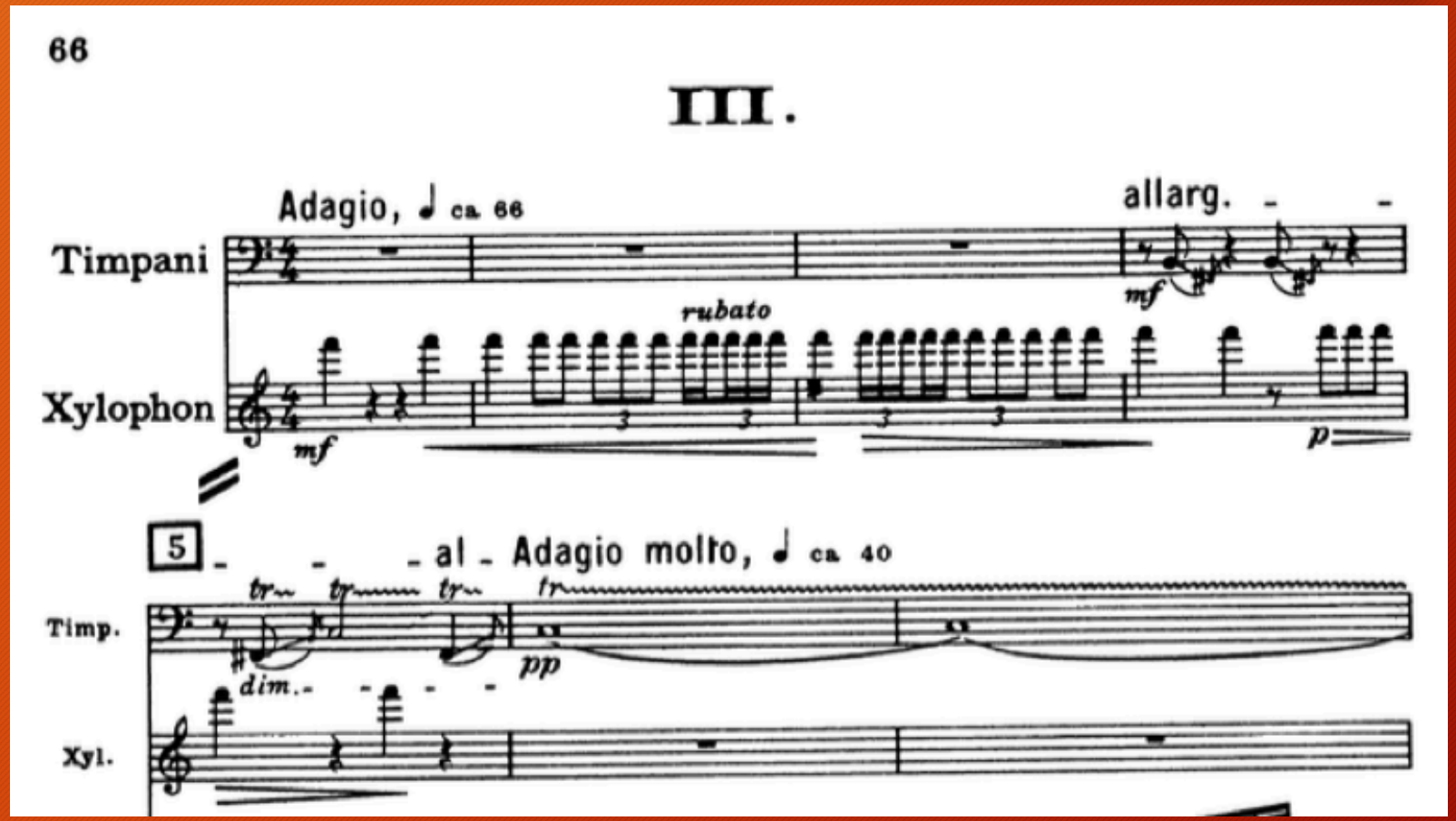
II. Allegro

III. Adagio

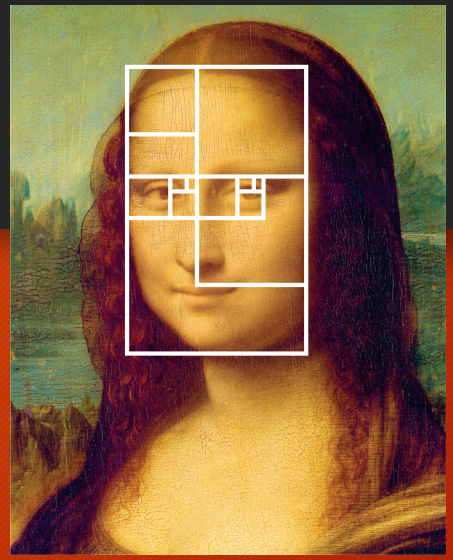


Une première écoute… (suite)

III. Adagio



Le nombre d’or



- Nombre réel positif (irrationnel)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Définition géométrique: rapport particulier entre deux longueurs

$$a, b \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} := \phi$$

- Définition algébrique: unique solution positive de l’équation quadratique

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Le nombre d’or

- Définition via la suite de Fibonacci

$$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

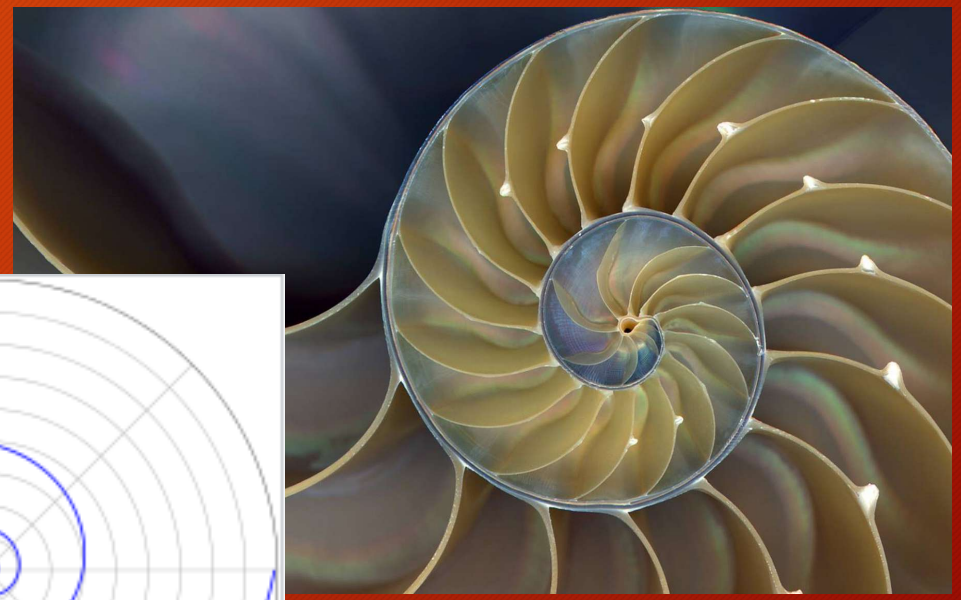
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Spirale logarithmique

- Construite à partir du nombre d'or
- Étudiée par Jacques Bernouilli (1654-1705) pour ses propriétés d'invariance
- On la retrouve à quelques endroits dans la Nature…

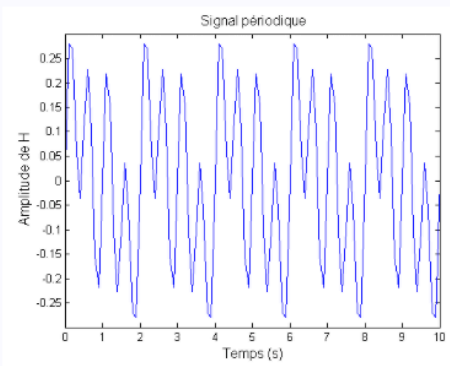
$$r = ab^{\theta} \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 1$$

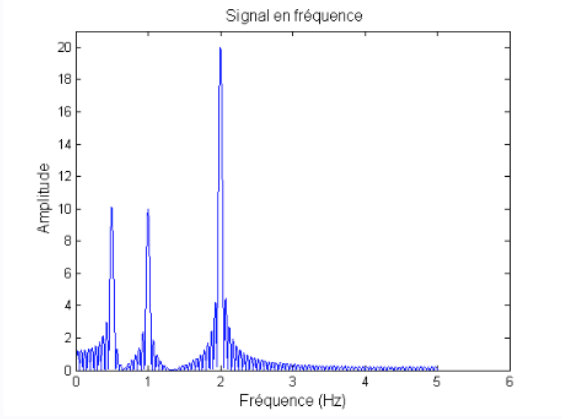


Quelques notions d'acoustique

Un son musical est une onde mécanique qui se propage dans l'air.

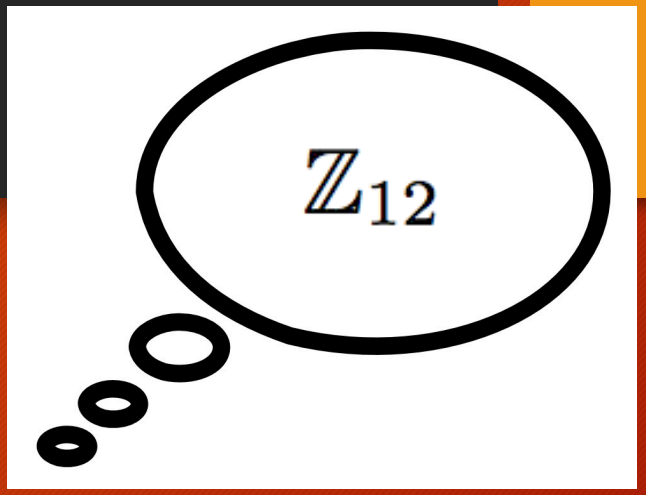
- Hauteur = Fréquence (Hz)
- Intensité = Amplitude (Décibels)
- Durée = Temps d'émission (Secondes)
- Timbre = Harmoniques et formants (Distingue les instruments entre eux)





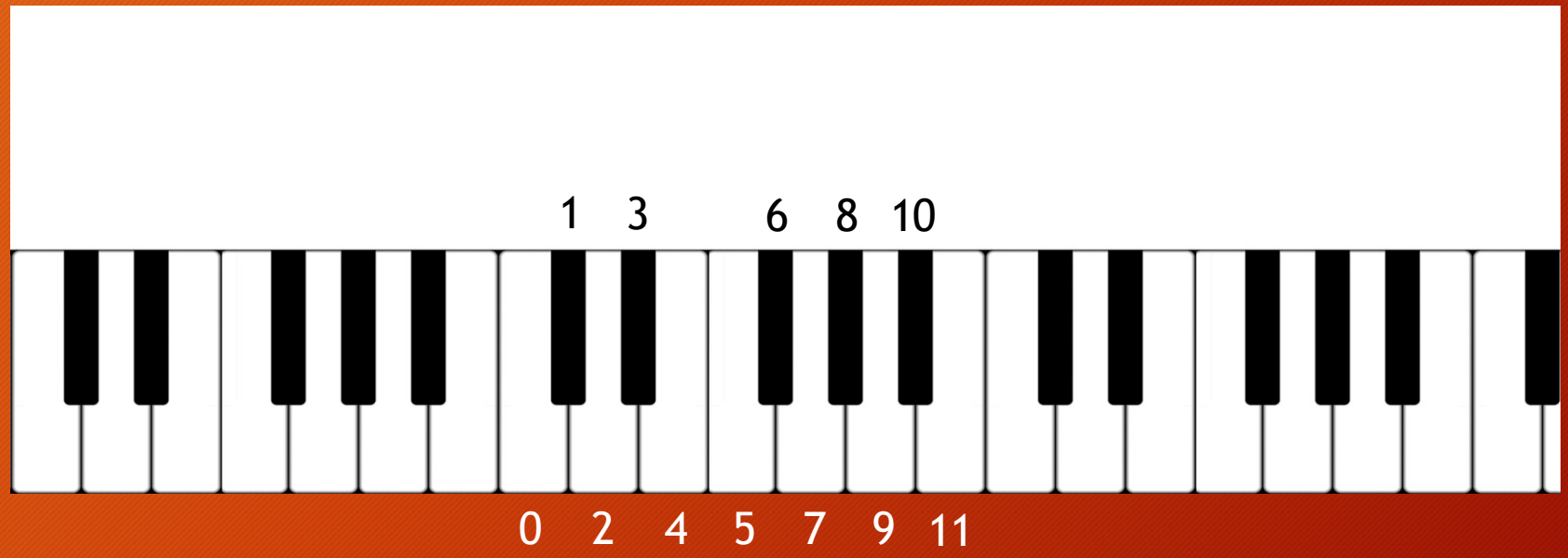
[3] Ulrich Michels, *Guide illustré de la musique*, Fayard, 1988

Un peu de théorie musicale



Qu’est-ce que la gamme tempérée?

- Division de l’octave en 12 demi-tons égaux (racine 12^e de 2)

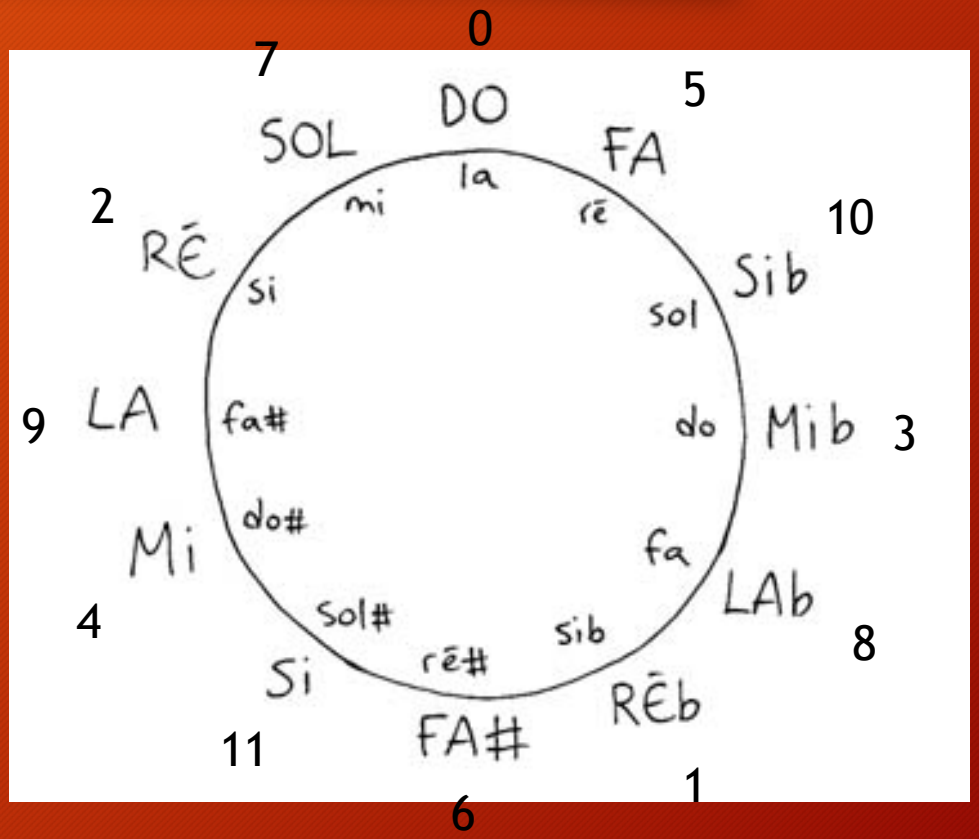


Le cycle des quintes

$$(7, 12) = 1 \implies O(\overline{7}) = 12$$

$$\implies \langle \overline{7} \rangle = \{\overline{7}, \overline{14} = \overline{2}, \overline{9}, \ldots\} = \mathbb{Z}_{12}$$

- À la base que ce que l'on nomme la musique tonale
- «De Bach à Wagner»
- Et aussi toute la musique populaire d'aujourd'hui…



[4] Luce Beaudet, *L'œil qui entend, l'oreille qui voit*, http://bw.musique.umontreal.ca/nm/index.html

Le cycle des quintes

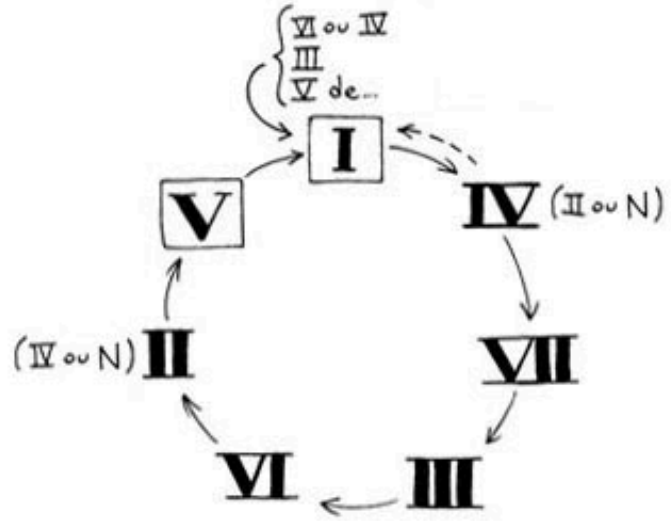
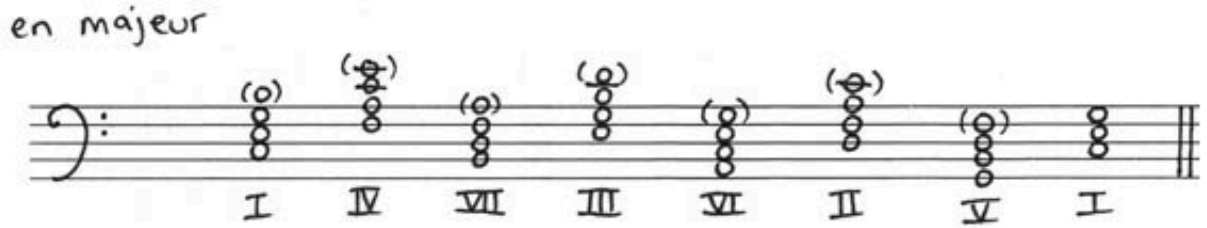


Figure 3



- Les accords sur les 7 degrés de la gamme sont à la base de l'harmonie
- Chaque note entretient une relation *fonctionnelle* avec l'harmonie qui la sous-tend
- Jean Dieudonné (1906-1992): Les mathématiques ne s'intéressent pas à la *nature* des objets mais aux *relations* qu'ils entretiennent entre eux.

Les analyses de Ernő Lendvai (1925-1993)

Le système d'axes

- Dans la musique tonale, il y a une hiérarchie entre les degrés. Le plus fort est le 1, suivi de 5 et 4.
- Lendvai introduit une *relation d'équivalence* (fonctionnelle) entre les notes constituant un même axe
- Importance du triton («tonique» => «pôle»)
- Il s'agit pour lui d'une extension de la tonalité.

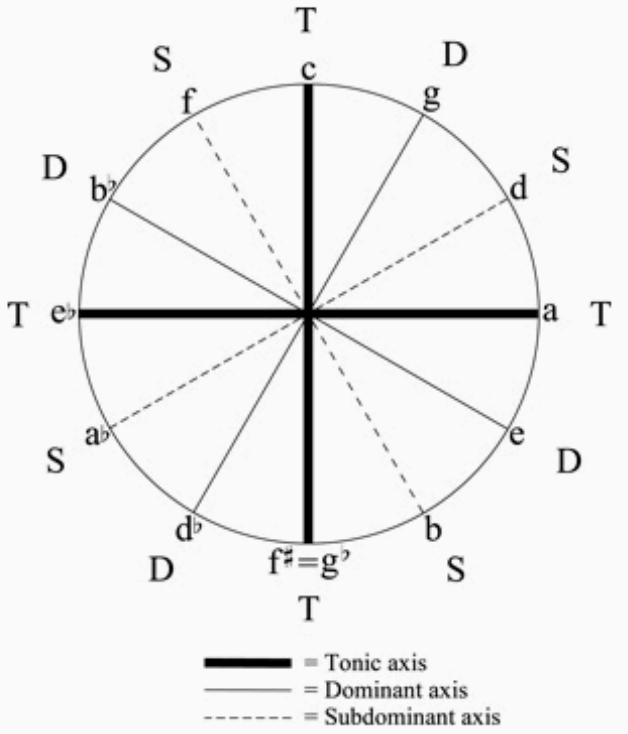
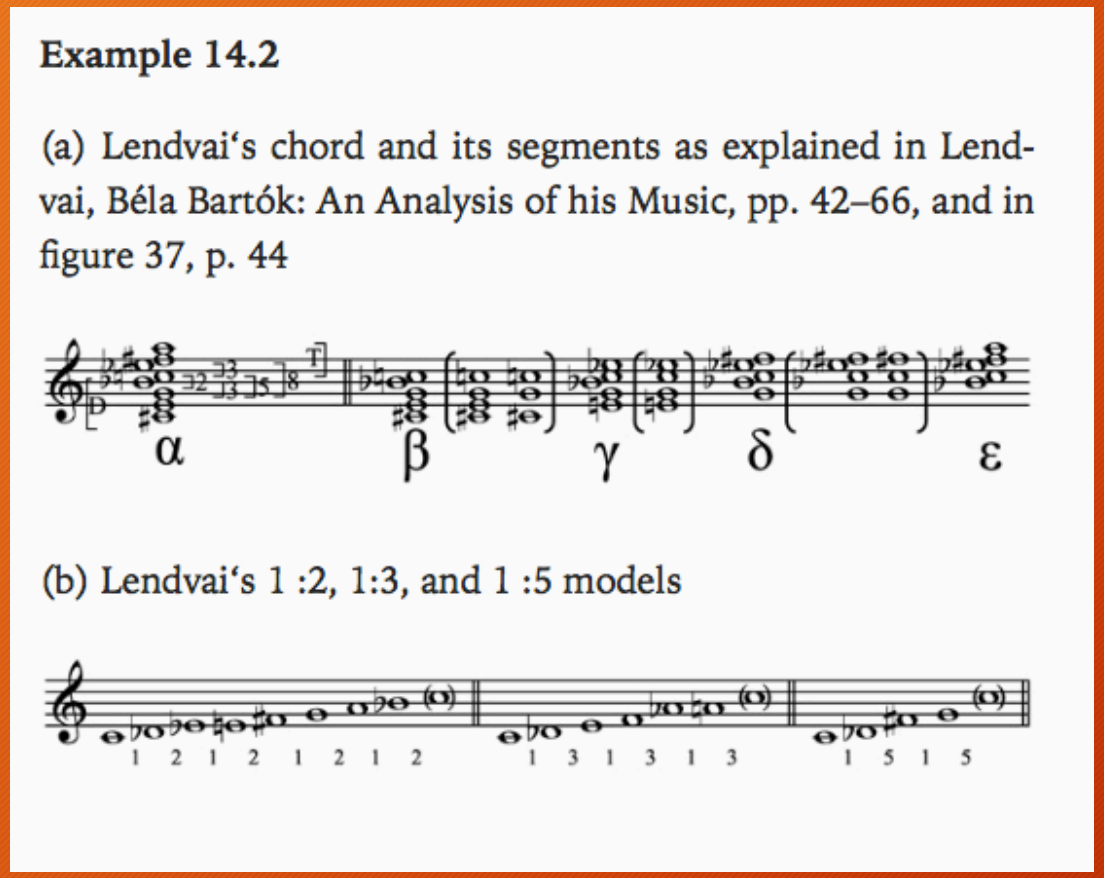


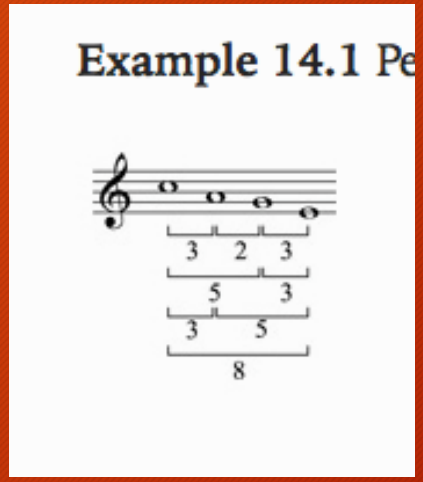
Figure 14.1 The circle of fifths with Lendvai's three axes.

Les analyses de Ernő Lendvai (1925-1993)



La mélodie

- Les modes utilisés par Bartók sont régis par les premiers nombres de la suite de Fibonacci



- Certains accords récurrents, symétriques, s'expliquent aussi de cette manière

[10] Amanda Bayley (ed.), *The Cambridge Companion to Bartók*, Cambridge University Press, 2001.

Les analyses de Ernő Lendvai (1925-1993)

Les proportions

- Les événements musicaux significatifs sont séparés par un nombre de mesures ou de temps correspondant à Fibonacci
- Le moment de plus grande intensité est au germe d'une spirale logarithmique
- Disposition symétrique des plus grandes sections de part et d'autre du *fff*

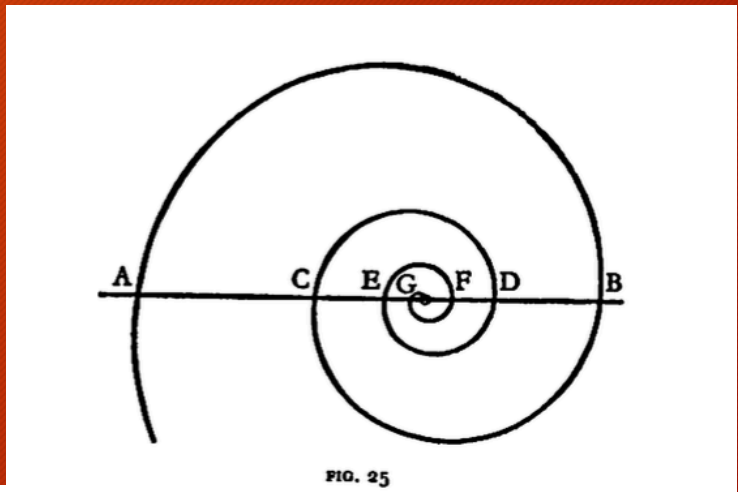


FIG. 25

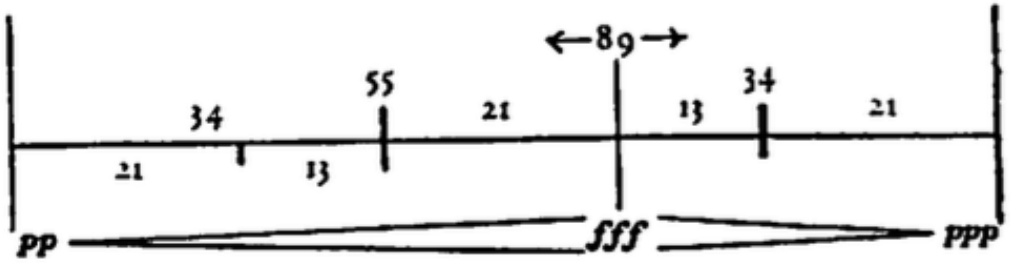
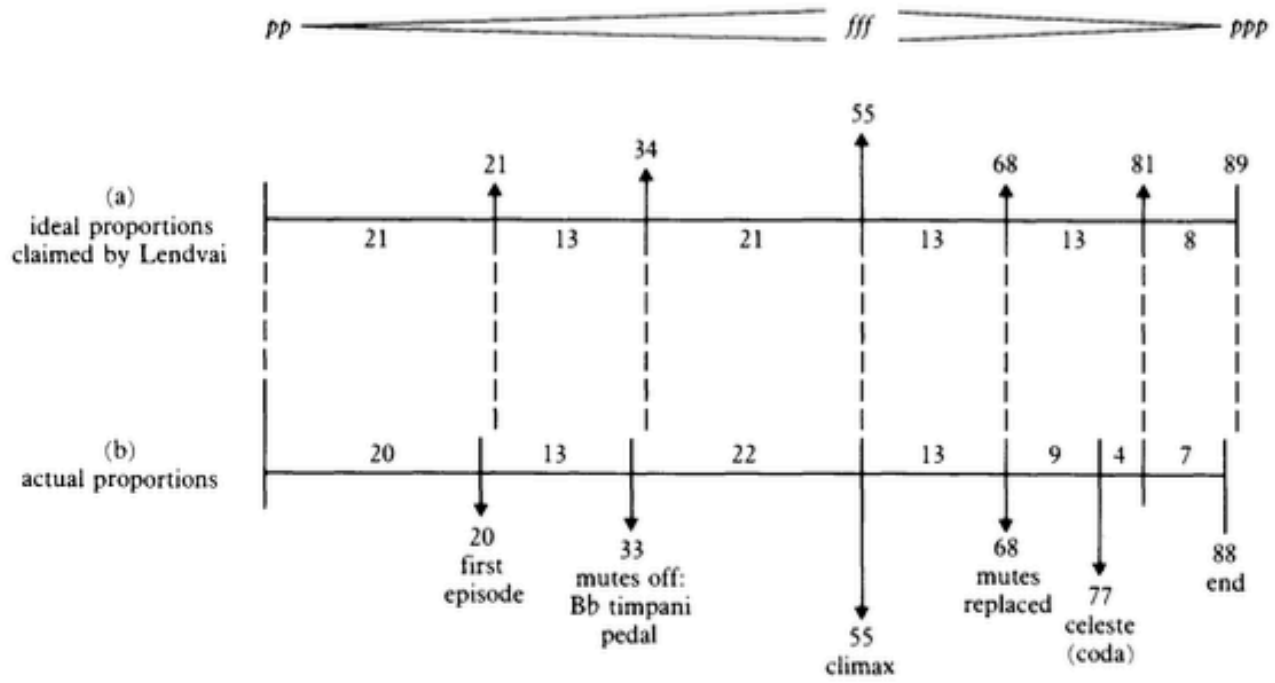


FIG. 22

[5] Ernő Lendvai, *Béla Bartók, An Analysis of his Music*, Kahn & Averill, 1971.

Les analyses de Lendvai (suite)

Fig. 4: Fugue from Music for Strings, Percussion and Celeste



- Un examen plus attentif nous montre quelques approximations…
- Notre ami tourne quelques coins ronds!

[6] Roy Howat, *Bartók, Lendvai and the Principles of Proportional Analysis*, Music Analysis **2** (1), 1983, pp.69-95

Les analyses de Lendvai (suite)

- « Unfortunately, a good deal of doubtful arithmetic manipulation, practised above all by Lendvai, deflected attention from the essential […] »

[7] Malcolm Gillies (ed.), *The Bartók Companion*, Amadeus Press, 1994.

- « Chacune des analyses de Lendvai peut ainsi être relativisée; il lui faut, en de nombreux endroits, tordre légèrement les chiffres pour parfaire sa démonstration.»

[8] Claire Delamarche, *Béla Bartók*, Fayard, 2011.

Certaines correspondances probantes

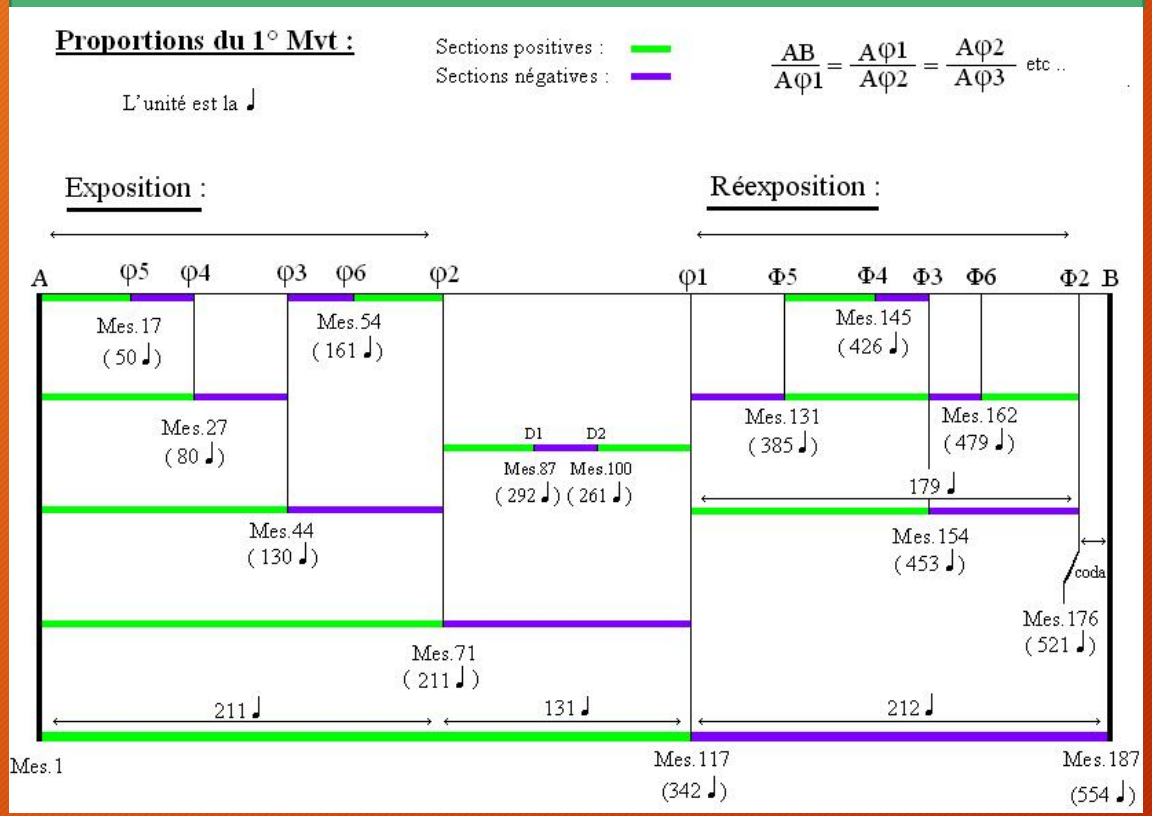
- Il fallait s'y attendre! Bartók ne compose pas avec un système de nombres; c'est une analyse *a posteriori*…
- Néanmoins, son sens des proportions est frappant, dans au moins quatre oeuvres de maturité

Musique pour cordes, percussions et célesta (1936), 1er mouvement: climax à la mesure 55 sur un total de 88.

Quatuor à cordes #5 (1939), 2e mouvement: point central de la forme en arche à la 138e noire sur sur un total de 223.

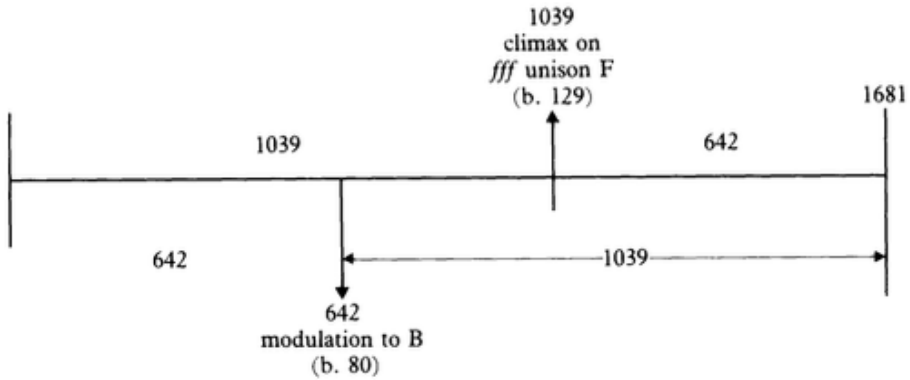
Certaines correspondances probantes

Concerto pour piano #3 (1945), 1er mouvement: réexposition débute exactement à la 342e noire sur un total de 554.



Divertimento pour orchestre à cordes (1939), 1er mouvement: climax à la 1039e croche sur 1681; modulation importante à la 642e=(1681-1039)e croche!

Fig. 2: first movement of *Divertimento*



[6] Roy Howat, *Bartók, Lendvai and the Principles of Proportional Analysis*, Music Analysis **2** (1), 1983, pp.69-95

Certaines correspondances probantes

- « […] rien ne laisse supposer qu'il se passionnait pour le nombre d'or, ni même en connaissant l'existence. Le sens des proportions de Bartók n'en est pas moins troublant. Mais, à l'évidence, il naît d'une pure intuition. »

[8] Claire Delamarche, *Béla Bartók*, Fayard, 2011.

- «this fugue […] is an excellent example of natural growth principles in action but that there is no evidence that Bartók was aware of these principles or designed any of his works according to them. The sketches to his later works make it clear that the music juste grew this way in his hand. »

[7] Malcolm Gillies (ed.), *The Bartók Companion*, Amadeus Press, 1994.

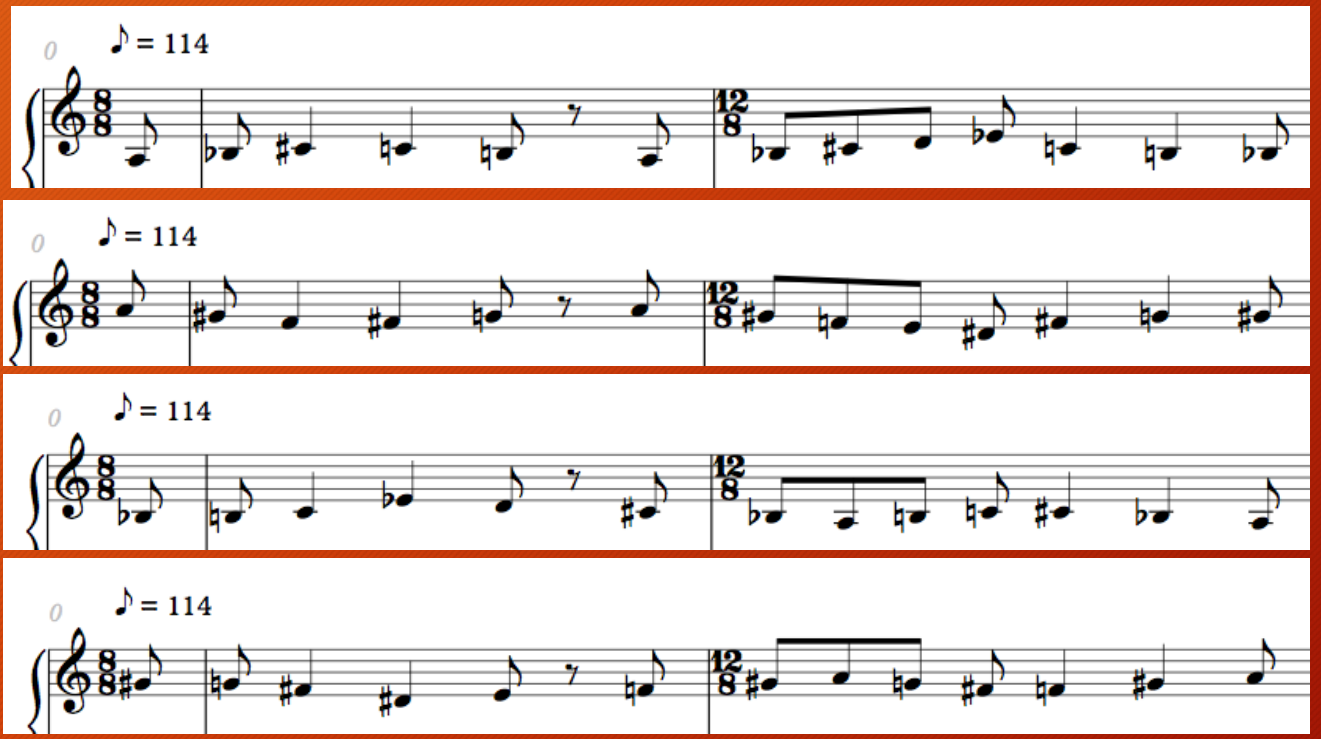
Dans l’atelier du compositeur

- De manière générale, le compositeur travaille avec un matériau de base, sur lequel il *opère certaines transformations*
- Elles peuvent concerner chacun des 4 paramètres ou plusieurs à la fois: les hauteurs, les intensités, les durées, le timbre.

Dans l’atelier du compositeur

Les hauteurs

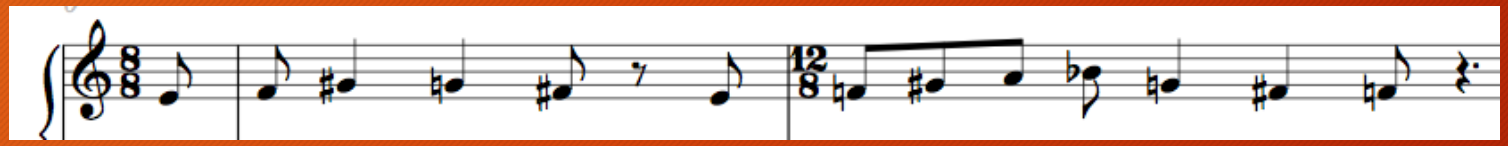
- Thème
- Inversion
- Rétrogradation
- Inverse-rétrograde



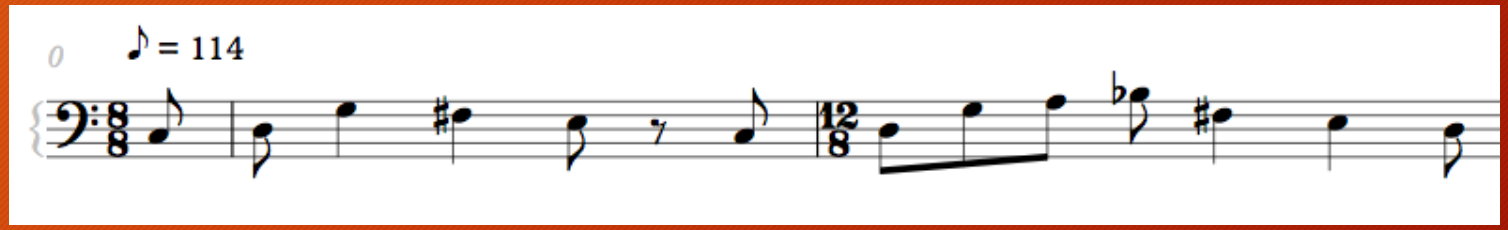
Dans l’atelier du compositeur

Les hauteurs

- Transposition



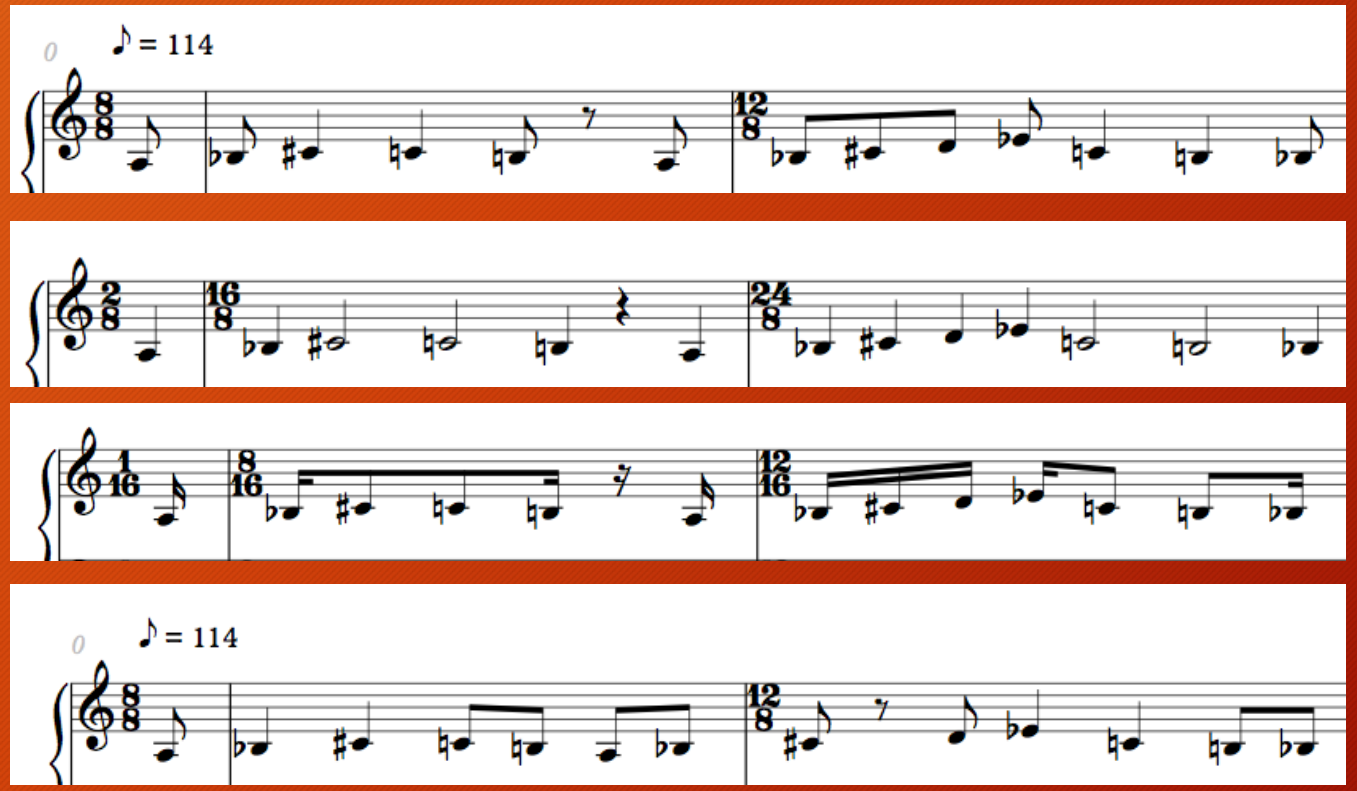
- Extension «à la Bartók»



Dans l’atelier du compositeur

Les durées

- Thème
- Augmentation
- Diminution
- Rétrogradation



Les symétries

- C’était clairement une tendance chez Bartók…
- Forme en arche
- Transformation des motifs, variation perpétuelle
- Écoutons le premier mouvement de *la Musique pour cordes, percussion et célesta* (1936)
- A été utilisé pour la bande sonore du film *The Shining* (Stanley Kubrick, 1980)
- Schéma au tableau: triton chromatique thème, fugue en quintes successives, climax sur l’axe, thème en inversion, forme en arche, nombre d’or.

https://www.youtube.com/watch?v=m129k5YcQnU

[7] Malcolm Gillies (ed.), *The Bartók Companion*, Amadeus Press, 1994.

Conclusion

« *La musique est un exercice d'arithmétique secrète où l'esprit ne réalise pas qu'il compte.* »

-Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Merci de votre écoute!

Des questions ?! ...

Bibliographie

[1] Iannis Xénakis, *Musiques formelles*, Éditions Richard-Masse, 1963

[2] Béla Bartók, *Écrits*, Éditions Contrechamps, 2006

[3] Ulrich Michels, *Guide illustré de la musique*, Fayard, 1988

[4] Luce Beaudet, *L'œil qui entend, l'oreille qui voit*, http://bw.musique.umontreal.ca/nm/index.html

[5] Ernő Lendvai, *Béla Bartók, An Analysis of his Music*, Kahn & Averill, 1971.

[6] Roy Howat, *Bartók, Lendvai and the Principles of Proportional Analysis*, Music Analysis **2** (1), 1983, pp.69-95

[7] Malcolm Gillies (ed.), *The Bartók Companion*, Amadeus Press, 1994.

[8] Claire Delamarche, *Béla Bartók*, Fayard, 2011.

[9] Elliott Antokoletz, *The Music of Béla Bartók*, University of California Press, 1984

[10] Amanda Bayley (ed.), *The Cambridge Companion to Bartók*, Cambridge University Press, 2001.

[11] László Somfai, Béla Bartók: Composition, Concepts and Autograph Sources, University of California Press, 1996.

[12] János Kárpáti, Bartók's Chamber Music, Pendragon Press, 1994.

Quelques suggestions d'écoutes!

- Contrastes
- 5^{e} quatuor à cordes
- 3^{e} Concerto pour piano
- Concerto pour orchestre
- Musique pour cordes, percussion et célesta
- Divertimento
- Sonate pour deux pianos et percussions